

Klaus Kramer

Autômatos Celulares com Inércia

Curitiba
2010

Klaus Kramer

Autômatos Celulares com Inércia

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz

Co-orientador: Prof. Dr. Marlus Koehler

Curitiba
2010

DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TÍTULO: AUTÔMATOS CELULARES COM INÉRCIA.

KLAUS KRAMER

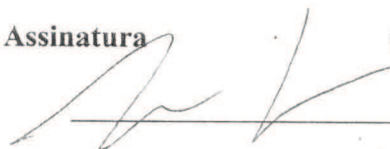
Em sessão pública iniciada às. quatorze hora, nesta data, após um Seminário sob o título acima, e posterior arguição esta banca examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato o conceito global A.

Banca Examinadora

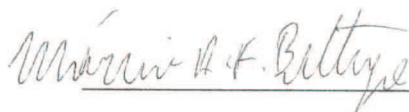
Prof. MARCOS GOMES ELEUTÉRIO DA LUZ
(Orientador/Presidente) (UFPR)

Assinatura

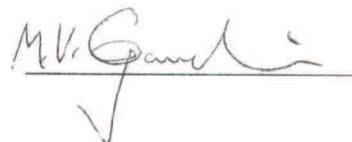
Conceito

 A

Prof. MARCIO HENRIQUE FRANCO BETTEGA
(UFPR)

 A

Prof. MADRAS VISWANATHAN GANDHI MOHAN
(UFAL)

 A

Curitiba, 26 de fevereiro de 2010.

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado do estudante **Klaus Kramer** são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação cujo título é: **Autômatos Celular Inércia**.

Curitiba, 26 de fevereiro de 2010.

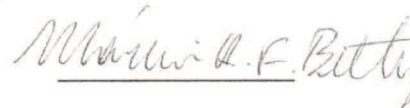
Banca Examinadora

Assinatura

Prof. MARCOS GOMES ELEUTÉRIO DA LUZ
(Orientador/ Presidente) (UFPR)



Prof. MARCIO HENRIQUE FRANCO BETTEGA
(UFPR)



Prof. MADRAS VISWANATHAN GANDHI MOHAN
(AFAL)



Dedicatória:

Existem três pessoas no mundo a quem eu gostaria de dedicar.

Meus pais, por todo o apoio que me deram,

*E minha esposa, namorada e grande amiga Rubia, que esteve do meu lado nesses
últimos dois anos.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus.

Um agradecimento especial à minha família, meus pais Neuza e Otto e irmãos Hans, Pedro Emilio e Marília, que apesar de me chamarem de louco, nunca me deixaram na mão quando precisei deles.

Dou também um enorme “Obrigado” à Rubia, mulher, esposa, amiga, companheira, e que está presente em minha vida por pouco tempo, apenas dois anos e meio, mas que já conquistou meu coração por completo (“for life”).

Meu orientador, Marcos Gomes merece minha gratidão, pelo apoio, pelas horas de discussões, pelos esclarecimentos de minhas dúvidas, e pelas correções de muitos erros meus.

Agradeço também meu co-orientador Marlus por ter prestado ajuda quando necessitei, discutindo vários resultados obtidos.

Meus sogros, Ralph e Rita me deram o melhor presente de minha vida, sua filha, e além disso me ajudaram a me “idiotizar” um pouco de vez em quando. Ao Ralph agradeço pela ajuda na revisão do texto da dissertação e à Rita agradeço as palavras certas ditas nas horas certas.

Aos meus amigos da pós-graduação quero agradecer, pois somente com a ajuda deles conseguimos nos distrair nas horas estressantes. Um agradecimento especial à Luciana, por ter se tornado uma grande amiga, à Natasha por sempre trazer doces, chocolates e outras coisas e sempre oferecer para nós, e além disso por estar sempre de bom humor sendo simpática com todos. Ao Marcelo e ao Tromer, pelas conversas diversas e divertidas.

Quero agradecer meus amigos de Campo Largo, principalmente ao Alan e ao Cleyterçon. Ao Alan por em praticamente todos os finais de semana estarmos fazendo algo diferente, escalando ou apenas passeando ou mesmo fazendo trilha de jipe, sendo ele a pessoa que estava ao meu lado quando sofri o acidente. Ao Cleyterçon agradeço por ter aparecido em minha vida e ter se tornado um dos meus melhores amigos, sempre me auxiliando no que eu necessito. Ao pessoal do Grupo Escoteiro ECO 189/PR quero fazer um agradecimento especial por terem me trazido muita alegria nesse último ano.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

Agradeço a todas as pessoas que sempre me alegraram nas horas de tristeza, que me animaram nas horas difíceis, que sempre estavam ao meu lado para o que der e vier.

Resumo

Desde que os autômatos celulares (AC) foram criados, vêm sendo muito utilizados em diversas áreas de conhecimento, pois são sistemas simples e de fácil implementação computacional. Em geral, AC são compostos por redes de células, onde cada célula assume um valor numérico que determina seu estado. O tempo é discreto e o valor do estado de cada célula num tempo posterior depende do valor dos estados de seus vizinhos no tempo anterior. A exata conexão entre estas quantidades é estabelecida por uma regra dinâmica específica (a regra de atualização). Existem milhares de regras distintas para AC. Em nosso trabalho utilizaremos uma regra simples, onde o estado da célula no tempo $t + 1$ depende da soma dos estados de seus vizinhos no tempo t . Consideramos 3 estados, sendo 2 ativos (+1, -1), que competem dinamicamente, um passivo (zero), que não influencia a regra de mudança. Definimos também um “estado interno”, a inércia, que é um ingrediente novo no AC. Essa inércia (que pode variar de 0 ao número máximo de vizinhos) confere a cada célula uma resistência à mudança de seu estado. Discutimos então, no caso de um AC bidimensional, como a inércia modifica os padrões de evolução e as propriedades dinâmicas do sistema. Estudamos diferentes aspectos do problema, populações das configurações finais, tempos de convergência, dinâmica de invasão, geração de padrões espaciais, dinâmica da competição entre os estado ativos e assim por diante. De forma geral encontramos que a inércia pode alterar de forma bastante significativa a dinâmica e o comportamento médio típico de um mesmo AC.

Abstract

Since cellular automata (CA) were created, they have been widely used in several areas of knowledge because they are systems that are easily and simply implemented in computers. In general, CAs are made up of cell networks in which each cell assumes a numerical value that determines its state. Time is discrete and the state of each cell in a later period depends on the state of its neighbors in the previous period. The relation between these states is established by means of a specific dynamic rule (the updating rule). There are thousands of different rules for CAs. In this dissertation we will use a simple rule by which the state of a cell in time $t + 1$ depends on the sum of the states of its neighbors in time t . We considered three states of which two (+1,-1) are active and compete dynamically, while one is passive (zero). We also defined an “internal state”, the inertia, which is an original contribution in this work. This inertia, which can vary from zero to the maximum number of neighbors, gives to each cell a resistance to changes in its state. Then, in the case of a two-dimensional CA, we discuss how this inertia changes the system’s evolutionary patterns and its dynamic properties. We study different aspects of this work, populations of the final configurations, convergence times, invasion dynamics, the generation of spatial patterns, competition dynamics between active states and so forth. Generally, we find that the inertia can change quite significantly the dynamics and typical average behavior of the same CA.

Sumário

1	Introdução	7
2	Autômato celular com inércia	11
2.1	Breve Histórico	11
2.2	Definição Básicas de Autômatos celulares e do nosso modelo	13
2.3	Quantidades que usaremos para caracterizar o AC	15
2.4	Geração de “ensemble” de matrizes iniciais para médias estatísticas do modelo	17
3	Inércia igual a zero para todos os elementos do AC	21
3.1	Resultados	21
4	Comparação entre AC com diferentes valores de inércia	30
4.1	Comparação entre diferentes valores de inércia	30
5	AC com padrões especiais para a distribuição de inércia	40
5.1	Tipo 1: Inércia em blocos	40
5.2	Tipo 2: Uma única região com $I \neq 0$	44
6	Inércia não-nula só para o estado zero	56
6.1	Comparações entre diferentes valores de inércia	56
7	Padrões espaciais para as configurações iniciais do AC	66
7.1	Padrão tipo 1: Invasão do estado +1 sobre o zero	66
7.1.1	Estado +1 no centro	66
7.1.2	Estado +1 nos cantos	67
7.2	Padrão tipo 2: Competição entre o estado +1 e -1	69
7.2.1	Estado +1 acima e estado -1 abaixo da diagonal principal interca- lados com o estado 0	69
7.2.2	Distribuição intercalada de +1's e -1's	70
7.2.3	Padrões simétricos diversos	71
8	Conclusão e Considerações Finais	74

Lista de Figuras

2.1	Evolução de um Jogo da vida que apresenta um planador.	12
2.2	Matriz para explicar a regra determinística. Cada cor representa um estado, branco representa o estado 0, cinza o estado -1 e preto o estado $+1$	15
2.3	Distribuição das matrizes do conjunto 1 nos parâmetros p_+ e c_+	18
2.4	Distribuição das matrizes do conjunto 2 nos parâmetros p_+ e c_+	18
2.5	Quantidade de matrizes versus população inicial do estado $+1$	18
2.6	Quantidade de matrizes versus clusterização inicial do estado $+1$	18
2.7	Quantidade de matrizes versus população inicial do estado $+1$	19
2.8	Quantidade de matrizes versus clusterização inicial do estado $+1$	19
2.9	População inicial média do estado $+1$ versus clusterização inicial do estado $+1$	20
2.10	Clusterização inicial média do estado $+1$ versus população inicial do estado $+1$	20
3.1	Quantidade de matrizes versus população inicial do estado $+1$;	22
3.2	Quantidade de matrizes versus clusterização inicial do estado $+1$	22
3.3	População inicial média do estado $+1$ versus clusterização inicial do estado $+1$	22
3.4	Clusterização inicial média do estado $+1$ versus população inicial do estado $+1$	22
3.5	População final média do estado $+1$ versus população inicial do estado $+1$	23
3.6	Clusterização final média do estado $+1$ versus população inicial do estado $+1$	23
3.7	Perfil da população final para matrizes com população inicial igual a 162 (azul), 172 (roxo) e 182 (amarelo) do primeiro conjunto de matrizes.	24
3.8	Perfil da população final para matrizes com população inicial igual a 162 (azul), 172 (roxo) e 182 (amarelo) do segundo conjunto de matrizes.	24
3.9	Perfil da clusterização final para matrizes com população inicial igual a 162 (azul), 172 (roxo) e 182 (amarelo) do primeiro conjunto de matrizes.	24
3.10	Perfil da clusterização final para matrizes com população inicial igual a 162 (azul), 172 (roxo) e 182 (amarelo) do segundo conjunto de matrizes.	24
3.11	População final média do estado $+1$ versus clusterização inicial do estado $+1$	25
3.12	Clusterização final média do estado $+1$ versus clusterização inicial do estado $+1$	25
3.13	Evolução de uma matriz com $c_+ = 0,563$, $c_- = 0,556$, $p_+ = 100$ e $p_- = 100$	26
3.14	Evolução de uma matriz com $c_+ = 0,84$, $c_- = 0,84$, $p_+ = 100$ e $p_- = 100$	26
3.15	Evolução de p_+ do AC da figura 3.13.	27
3.16	Evolução de c_+ do AC da figura 3.13.	27

3.17	Evolução de p_+ do AC da figura 3.14.	27
3.18	Evolução de c_+ do AC da figura 3.14.	27
3.19	Tempo de convergência médio versus população inicial do estado +1. . . .	28
3.20	Tempo de convergência médio versus clusterização inicial do estado +1. . .	28
3.21	Quantidade de matrizes versus tempo de convergência.	29
3.22	População inicial média do estado +1 versus tempo de convergência. . . .	29
3.23	Clusterização inicial média do estado +1 versus tempo de convergência. . .	29
4.1	População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	31
4.2	Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	31
4.3	Coefficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	31
4.4	Clusterização final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia;	33
4.5	Ângulo de inclinação da reta da clusterização final média pela população inicial para todos os valores de inércia;	33
4.6	Coefficiente linear da reta da clusterização final média pela população inicial para todos os valores de inércia;	33
4.7	População final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	34
4.8	Ângulo de inclinação da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	34
4.9	Coefficiente linear da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	34
4.10	Clusterização final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	35
4.11	Ângulo de inclinação da reta da clusterização final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	35
4.12	Coefficiente linear da reta da clusterização final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	35
4.13	Tempo de convergência médio versus valor da inércia.	36
4.14	Evolução de um autômato com clusterização inicial do estado +1 igual a 0,169864, população inicial do estado +1 igual a 172 e tempo de convergên- cia igual a 9 iteradas quando $I = 0$	37
4.15	Evolução da população do estado +1 para todos os valores de inércia rela- tivo à figura 4.14.	38
4.16	Evolução da clusterização do estado +1 para todos os valores de inércia relativo à figura 4.14.	38
4.17	Média da população final do estado 0 versus o valor da inércia relativo à figura 4.14.	39
5.1	Representação da distribuição de inércia do tipo 1.	41
5.2	Quantidade de matrizes versus população inicial do estado +1.	41
5.3	Quantidade de matrizes versus clusterização inicial do estado +1.	41
5.4	População inicial média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.	42

5.5	Clusterização inicial média do estado +1 versus população inicial do estado +1.	42
5.6	População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1.	42
5.7	Clusterização final média do estado +1 versus população inicial do estado +1.	42
5.8	População final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.	43
5.9	Clusterização final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.	43
5.10	Tempo de convergência médio versus população inicial do estado +1;	44
5.11	Tempo de convergência médio versus clusterização inicial média do estado +1;	44
5.12	Evolução de um autômato típico com clusterização inicial do estado +1 igual a 0,16531, população inicial do estado +1 igual a 172 e tempo de convergência igual a 6 iteradas.	44
5.13	Representação da distribuição de inércia do tipo 2.	45
5.14	Quantidade de matrizes que convergiram versus o valor da inércia.	46
5.15	Configuração inicial e as duas configurações estacionárias de um AC típico com $I = 0$	47
5.16	Configuração inicial e configuração estacionária de um AC típico com $I = 1$	47
5.17	Quantidade de matrizes que convergiram versus o população inicial do estado +1.	48
5.18	Quantidade de matrizes que convergiram versus o clusterização inicial do estado +1.	49
5.19	População inicial média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.	50
5.20	Clusterização inicial média do estado +1 versus população inicial do estado +1.	50
5.21	População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	51
5.22	Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	51
5.23	Coefficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	51
5.24	Clusterização final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	52
5.25	Ângulo de inclinação da reta da clusterização final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	52
5.26	Coefficiente linear da reta da clusterização final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	52
5.27	População final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	53
5.28	Ângulo de inclinação da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	53
5.29	Coefficiente linear da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	53
5.30	População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	54

5.31	Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	54
5.32	Coefficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	54
5.33	Tempo de convergência médio versus valor da inércia.	55
5.34	Evolução de um autômato com clusterização inicial do estado +1 igual a 0.167878, população inicial do estado +1 igual a 172 e tempo de convergência igual a 9 iteradas quando $I = 0$	55
6.1	Quantidade de matrizes que convergiram versus o valor da inércia.	57
6.2	Quantidade de matrizes que convergiram versus o população inicial do estado +1.	58
6.3	Quantidade de matrizes que convergiram versus o clusterização inicial do estado +1.	59
6.4	População inicial média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.	60
6.5	Clusterização inicial média do estado +1 versus população inicial do estado +1.	60
6.6	População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	61
6.7	Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	61
6.8	Coefficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	61
6.9	Clusterização final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	62
6.10	Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	62
6.11	Coefficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.	62
6.12	População final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	63
6.13	Ângulo de inclinação da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	63
6.14	Coefficiente linear da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	63
6.15	Clusterização final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.	64
6.16	Ângulo de inclinação da reta da clusterização final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	64
6.17	Coefficiente linear da reta da clusterização final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.	64
6.18	Tempo de convergência médio versus valor da inércia.	65
6.19	Evolução de um autômato com clusterização inicial do estado +1 igual a 0,169574, população inicial do estado +1 igual a 172 e tempo de convergência igual a 9 iteradas quando $I = 0$	65
7.1	Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e 4 elementos centrais no estado +1.	67

7.2	Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e 4 elementos +1 em um dos cantos.	67
7.3	Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e 2 elementos +1 em distribuídos em cantos opostos.	68
7.4	Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e um elemento +1 em cada canto.	68
7.5	Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e 4 elementos +1 em cada canto.	69
7.6	Evolução de um autômato onde encontramos o estado +1 acima e o estado -1 abaixo da diagonal principal intercalados com o estado 0.	70
7.7	Evolução de um autômato onde encontramos o estado +1 e -1 intercalados, na forma de um tabuleiro de xadrez. Note que a evolução entra num ciclo periódico de período 2.	70
7.8	Evolução de um autômato com uma distribuição simétrica dos estados +1 e -1, mas com o estado +1 inicialmente em maior número.	71
7.9	Semelhante à figura 7.8 mas com uma pequena modificação do padrão central do AC inicial.	72
7.10	Evolução de um AC com um padrão espacial particular, bastante simétrico.	73
7.11	Evolução de um que é uma pequena modificação do AC da figura 7.10.	73

Capítulo 1

Introdução

Nos anos 40 do século passado, John von Neumann e Stanislaw Ulam [22] introduziram a idéia de autômatos celulares (daqui em diante AC) como uma simples construção matemática para modelar processos de replicação na biologia, tais como a reprodução de organismos vivos. Estes sistemas ficaram um pouco esquecidos até a década de 70, quando John H. Conway introduz o “Jogo da Vida” [13], que nada mais é que um AC que tenta reproduzir estados de vida e morte baseado em regras muito elementares de interação. Talvez, a primeira pessoa a propor que AC poderiam ser usados num contexto bastante geral, e assim simular diferentes processos da natureza, é Konrad Zuse [42]. A partir dos anos 70 houve então uma forte retomada do estudo de AC. Em particular, grande impulso é dado por Stephen Wolfram, que em uma série de artigos em 1983 mostra como os AC’s podem ser usados como ferramentas simples, porém poderosas, na análise de sistemas físicos, biológicos e computacionais [36]. De particular importância é sua classificação de todos os possíveis AC unidimensionais.

Atualmente os AC são amplamente usados em diferentes contextos. Constituem-se numa classe de modelos de fácil implementação computacional, mostram-se capazes de tratar e reproduzir comportamentos complicados, gerando padrões espaços-temporais extremamente variados e até mesmo com características universais [29]. Assim, AC são empregados em diversas áreas, desde modelos de tráfego de automóveis em rodovias [21], modelos de percolação [5], incêndios florestais [17], até em modelos de epidemias do tipo SIR (suscetível, infectado, removido) [5]. Também encontramos aplicações de AC em modelagem de sistemas coletivos [1], por exemplo, em modelos de comportamento de formigas em uma colônia [33], bem como no estudo de sistemas dinâmicos caóticos [14, 16]. Uma boa revisão das inúmeras possibilidades de uso de AC para descrever diferentes fenômenos pode ser encontrada no livro de Joel Schiff [32]. Além disso, no livro “A New Kind of Science” [34], S. Wolfram apresenta variados AC’s bidimensionais, além de discutir como os AC’s podem ser usados para gerar distintas estruturas fractais.

De forma mais geral, AC são sistemas dinâmicos, definidos em uma rede (em 1, 2 até n dimensões finita) e cuja evolução se dá a tempos discretos. São compostos por elementos,

ou células (é daí que vem seu nome), que evoluem a partir de uma regra pré-determinada. As células estão distribuídas numa rede regular (em geral finita) com N^d células, com d a dimensão espacial do problema. A cada célula é atribuído um valor que chamamos de estado. Os estados podem variar de $-\infty \leq S_k \leq +\infty$, onde S_k representa o estado da célula k . Cada célula é evoluída a partir da regra determinística (pré-estipulada) que também chamamos de regra de atualização. Quando a regra é aplicada sobre todas as células (no tempo t), uma nova geração é produzida no tempo $t + 1$.

A regra de atualização diz como o estado da célula k depende do estado de suas células vizinhas. A vizinhança pode ser definida de diferentes formas, dependendo do tipo de modelo considerado. Por exemplo, num AC unidimensional, a vizinhança de um elemento pode ser seus dois vizinhos adjacentes (primeiros vizinhos ou vizinhança de primeira ordem), ou seus quatro vizinhos, dois de primeira ordem e dois de segunda ordem, e assim por diante. Já num AC bidimensional típico – que pode ser pensado como um tabuleiro de xadrez – podemos ter uma vizinhança de primeira ordem construída de diferentes maneiras. Por exemplo, temos a vizinhança de Neumann, composta pelos quatro vizinhos adjacentes ao elemento central, formando uma cruz. Temos também a vizinhança de Moore, consideramos todos os 8 vizinhos adjacentes ao elemento central. Além disso, vizinhanças de segunda ordem ou superior também são possíveis. No caso de segunda ordem, há 12 vizinhos para Neumann e 24 para Moore.

Quando Wolfram fez sua classificação dos autômatos celulares unidimensionais [36], considerou que as células podiam estar em apenas dois estados (0 e 1) e a vizinhança era de raio 1 (2 vizinhos adjacentes). Descobriu então que para tais AC's existem ao todo 256 possíveis regras de atualização. Wolfram fez o mesmo tipo de consideração com relação a número de estados e tipo de vizinhança para classificar AC bidimensionais [25]. Assumiu apenas dois estados (0 e 1), 3 vizinhanças diferentes de primeira ordem (Neumann, Moore e hexagonal) e 6 regras dinâmicas diferentes. Só a título de curiosidade, para um AC geral e vizinhança de Moore existem 2^{512} regras distintas.

Por último mencionamos que também há a possibilidade de se construir AC que além das regras dinâmicas usais, também apresentam estocasticidade (isto é, aspectos probabilísticos não-deterministas) e que são usados em diferentes aplicações, como por exemplo, o estudo de transição de fase no “jogo da vida” com regras estocásticas [20], o estudo de tráfego de veículos com um AC não determinístico [6], estudo de conversões de áreas rurais em áreas urbanas em algumas cidades através de um modelo AC estocástico [37] ou ainda no estudo de regras de transição em um modelo de AC estocástico com estados finitos [38]. Embora esta seja uma área muito interessante de pesquisa, não iremos discutir tais sistemas em detalhes aqui, uma vez que nosso interesse está em AC determinísticos. Entretanto, mencionamos que de certa forma a introdução de “estados internos” (inércia) que faremos no presente trabalho, em certas condições pode ser pensando como um agente externo à dinâmica usual do sistema, portanto de certa maneira pode “lembrar” os

fatores probabilísticos de AC estocásticos. Isto é particularmente verdade em modelos de resistência (disseminação de novos produtos no mercado [19], estudo da receptividade do comércio eletrônico em pequenas comunidades [41], modelos de difusão de inovações com AC [40]), onde algo similar a uma oposição em mudar de estado é descrita por probabilidades não-nulas de não haver troca do valor de S_k da célula k em cada atualização do AC.

Embora AC com muitos estados seja possível (veja, por exemplo [8, 26]) é muito mais usual a utilização de apenas dois estados para cada célula do problema. De fato, toda a teoria de classificação feita por Wolfram considera apenas dois estados. Entretanto, em nosso trabalho utilizaremos um AC com três estados $(-1, 0, +1)$. Notamos que Kapliy, Prokaznikov, Rud utilizaram um AC estocástico com três estados para fazer um modelo discreto para a absorção, porém tal AC e o AC do nosso trabalho são totalmente diferentes (ver capítulo 2), uma vez que em nosso trabalho um dos estados será passivo em termos de regra dinâmica de troca. Também iremos considerar o caso bidimensional, com uma vizinhança de primeira ordem de Moore. Como regra determinística, usaremos uma dinâmica bastante comum que é a de trocar o estado de uma determinada célula pelo valor que corresponde ao estado de maior população na vizinhança.

A contribuição inédita de nosso trabalho é introduzir um novo parâmetro no sistema, que é um “estado interno” (e que não evolui com o tempo) que chamaremos de inércia. Esta quantidade representa uma resistência natural de cada célula em mudar seu estado devido à pressão dinâmica exercida pela vizinhança. Nosso objetivo com a introdução deste fator novo é justamente estudar como padrões espaciais, e como propriedades dinâmicas gerais, tais como convergência para estados estacionários, são afetados por uma inércia natural no sistema. Observamos que uma idéia similar, mas implementada de uma forma totalmente distinta, é usada na modelagem de mudanças sociais [23]. Além disso, em tal artigo o que seria a inércia, na verdade é uma pressão dinâmica de resistência à mudança, cuja construção matemática é bem mais complicada que nossa presente proposta.

A proposta geral da dissertação é apresentar um estudo exploratório dos diferentes aspectos do modelo aqui proposto. Sendo assim, não iremos discutir possíveis aplicações concretas para nosso AC. Entretanto, salientamos que os resultados aqui observados indicam que tal tipo de sistema seria útil para tentar entender como certas estruturas espaços-temporais realísticas são modificadas pela presença de resistência intrínseca no problema. Como exemplo de situação onde nossos AC poderiam ser aplicados, citamos estudos de impacto social devido ao processo de formação de opinião [15] e estudo de modelos de inter-relações sociais (sociedades artificiais) [10], que trata de trocas, migração, formação de grupos, combates, interações com o ambiente, disseminação de cultura [3], propagação de doenças, dinâmica de populações e segregação espacial [31, 30].

O trabalho é organizado da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos em detalhe a construção do nosso AC, definimos as quantidades relevantes que serão estudadas e

discutimos como as médias para as mesmas serão feitas. Também mostramos como gerar conjuntos de matrizes a serem usadas como configurações iniciais em nossas análises. No capítulo 3 apresentamos o caso mais simples, inércia igual a zero para todos os elementos do AC. No capítulo 4 consideramos o AC para inércia diferente de zero e igual para todos os elementos que inicialmente encontram-se no estado zero, fazendo uma análise comparativa entre as diferentes situações. O caso em que $I = I(i, j)$, isto é, a inércia depende da posição da célula, é estudado no capítulo 5. No capítulo 6 analisamos a situação onde apenas os estados neutros (zero) possuem inércia. Finalmente o capítulo 7 é devotado ao caso onde as matrizes iniciais possuem padrões espaciais particulares. Conclusões e considerações finais são apresentadas no capítulo 8.

Capítulo 2

Autômato celular com inércia

Neste capítulo discutimos a idéia de autômatos celulares, apresentando também um breve histórico sobre sua criação. Então introduzimos nosso modelo específico, bem como os aspectos escolhidos para fazer a análise de tal sistema.

2.1 Breve Histórico

Na década de 40, John von Neumann trabalhava com sistemas replicativos, porém tinha algumas dificuldades, pois não conseguia construir um robô auto-replicativo (robô que fosse capaz de se auto-copiar a partir de “peças” separadas). Seguindo a sugestão de Stanislaw Ulam, colega de trabalho de Neumann, ele solucionou o problema distribuindo todo o sistema num universo discreto, composto por células. A evolução do sistema dando-se em tempos discretos. Cada célula é caracterizada por um “estado interno”, definido por um número inteiro. Existe uma regra que determina a evolução do sistema, essa regra é a mesma para todas as células e é função dos estados da vizinhança. Esse sistema dinâmico totalmente discreto inventado por Neumann, antigamente chamado de espaço celular, hoje é conhecido como Autômato Celular (AC).

Assim então nasceu o primeiro AC auto-replicativo [22]. Ele é composto por uma rede quadrada bidimensional e a estrutura de auto-replicação é feita por milhares de células elementares. Cada uma dessas células pode estar em um dos 29 possíveis estados para esse AC. A vizinhança utilizada é a conhecida vizinhança de Neumann (quatro elementos adjacentes, um a cima, um a baixo, um à esquerda e um à direita). Com esse AC, Neumann foi capaz de criar uma “máquina” que podia se clonar, criando uma réplica com nível de complexidade menor ou igual à original.

Ao final dos anos 50, pesquisadores notaram que AC poderiam ser utilizados como computadores paralelos e na década de 60 alguns trabalhos foram publicados provando formalmente o poder de computação paralela que os AC possuem [7]. Atualmente vários trabalhos são realizados na área de computação paralela utilizando autômatos celulares. Podemos citar os artigos [18, 24] que mostram várias aplicações de AC em computação

paralela.

Em 1969, Konrad Zuse publicou um livro, *Rechnender Raum* (“Calculating Space”) [42], propondo que as leis físicas do universo são discretas por natureza e que o universo inteiro é apenas um gigantesco autômato celular.

Em 1970, o AC conhecido como “Jogo da Vida” se tornou famoso [12, 13]. Ele foi criado por John Conway e simula os estados de vida e morte (1 e 0) de células em um AC bidimensional. A regra de atualização diz que se uma célula preta (estado 1, viva) tem 2 ou 3 vizinhos pretos, ela continua preta, se tem menos que 2 ou mais que 3 vizinhos pretos, ela se torna branca (estado 0, morta). Se uma célula branca tem 3 vizinhos pretos, se torna preta. Essa regra foi inspirada em interações de bactérias em uma colônia, onde dependendo da vizinhança local, ocorre uma morte rápida de algumas células devido à competição por alimento, ou um rápido crescimento, devido à reprodução. Apesar de ser um sistema extremamente simples, ele é capaz de apresentar uma variedade enorme de comportamentos, variando de uma aparente desordem a uma ordem total. Uma das características mais interessantes desse AC é o surgimento freqüente de “planadores” (figura 2.1), que são arranjos de células que se movem através do AC. Pode ser demonstrado que planadores interajam de uma forma que seja possível emular uma máquina de Turing universal [28].

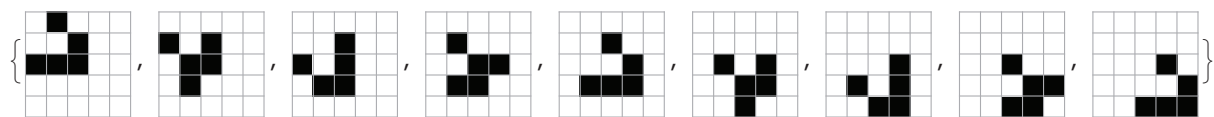


Figura 2.1: Evolução de um Jogo da vida que apresenta um planador.

Nos anos 80, Stephen Wolfram publicou uma série de artigos onde investigou uma classe simples, mas geral de AC, que chamou de autômato celular elementar. Esses artigos estão reproduzidos em seu livro “*Cellular Automata and Complexity: Collected Papers*” [35]. O comportamento complexo apresentados por tais AC com regras muito elementares levaram Wolfram a pensar que a complexidade na natureza deve ter um mecanismo parecido. Em 2002 publicou “*A New Kind of Science*” [34], onde apresenta alguns modelos físicos baseados em autômatos celulares.

Em “*The Lifebox, The Seashell and The Soul*” [29], Ruby Rucker tenta expandir as teorias de Wolfram, que diz que a natureza pode ser explicada através de algoritmos simples, que geram resultados complexos, como num AC. Segundo essa teoria (Automatismo Universal), tudo o que existe no universo (formato de folhas, montanhas, continentes, o clima, chuvas, ventos, migração de animais, movimento de estrelas, processos da mente, etc.) é gerido por algoritmos básicos que são capazes de originar a complexidade que vemos na física, biologia, na sociedade, cultura e até na psicologia.

2.2 Definição Básicas de Autômatos celulares e do nosso modelo

De forma bem geral temos que os autômatos celulares são modelos matemáticos simples, compostos por vários elementos idênticos (células), distribuídos em uma grade n -dimensional, que interagem entre si através de uma regra pré-determinada, sendo o tempo discreto. Cada célula é caracterizada por um estado, que pode assumir um conjunto finito de valores inteiros. A cada vez que a regra é aplicada no AC inteiro, uma nova geração é produzida.

Para todas as regras de atualização, o estado de uma célula num tempo posterior depende dos estados de sua vizinhança no tempo anterior. A vizinhança pode ser definida de diferentes maneiras, por exemplo, num AC unidimensional a vizinhança pode ser apenas os primeiros vizinhos, ou segundos vizinhos (primeiro e segundo a direita e à esquerda), e assim por diante. Temos também que os primeiros vizinhos de um elemento podem não participar da vizinhança dependendo da definição e, além disso, o próprio elemento pode participar da vizinhança. Num AC bidimensional temos duas principais vizinhanças mais comumente usadas, vizinhança de Neumann e de Moore. A vizinhança de Newman é composta pelos 4 vizinhos adjacente (a cima, a baixo, à esquerda e à direita). Já a vizinhança de Moore é composta pelos 8 vizinhos em torno de cada célula.

Neste trabalho utilizamos um autômato celular bidimensional, representado por uma matriz de tamanho N . Cada elemento da matriz corresponde a uma célula e cada célula pode estar nos seguintes estados: 0 (zero ou nulo), -1 (negativo), +1 (positivo). A maioria dos AC estudados na literatura são definidos de tal forma que todos os estados competem, como por exemplo na Ref. [4] onde os autores estudam a evolução do vírus HIV, ou em [9] onde os autores utilizam tanto AC quanto outros métodos para estudar a dinâmica espaço-temporal de comunidades. Porém, aqui iremos utilizar três estados, sendo que temos apenas os estados +1 e -1 competindo (estados ativos) e o estado 0 sendo neutro (estado passivo em termos da competição dinâmica). Até onde sabemos não existe na literatura nenhum AC que utiliza este tipo de separação entre tipos de estados (com respeito à dinâmica de competição). Porém existem vários modelos que utilizam um AC com 3 estados. Por exemplo, no artigo de Platkowski [27] os 3 estados do AC representam a dinâmica da auto-organização espacial de uma mistura de 3 compostos. Alonso-Sanz e Martín também trabalham com um AC unidimensional com 3 estados [2], considerando uma regra com memória, ou seja, o elemento no tempo posterior sabe seu estado e de seus vizinhos no tempo anterior.

Em nosso caso consideramos uma vizinhança composta pelos oito vizinhos adjacentes, ou seja, vizinhança de Moore de raio 1. As condições de borda são definidas da seguinte maneira: nas bordas e nos cantos, os elementos interagem apenas com seus vizinhos adjacentes, sendo que os elementos da borda têm 5 vizinhos adjacentes e os elementos do

canto tem apenas 3. A escolha de condições de borda não periódicas é feita, pois vários problemas de interesse, a exemplo de padrões de fragmentação em ecossistemas [39] e o fenômeno de ecótono em biologia [11] poderiam ser simulados por nosso modelo e exigem tal tipo de condição de contorno.

As células de um AC mudam de estado de acordo com sua regra determinística, ou seja, o estado no tempo $t + 1$ depende dos estados das células vizinhas no tempo t . Como um novo ingrediente ao problema adicionamos mais um parâmetro, ou seja, um “estado interno” denominado inércia, que nada mais é do que uma “resistência” que cada célula possui em mudar seu estado atual. A inércia em cada célula pode assumir valores entre 0 e 8. Quando a inércia de uma célula é igual a zero, dizemos que sua resistência à mudança é nula, ou seja, a célula vai mudar de estado de acordo com a regra dinâmica. Porém, se o valor de sua inércia for maior que zero, o estado da célula só mudará se uma condição extra for satisfeita.

A atualização do AC é então dada pela regra dinâmica e a condição inercial descritas a seguir:

- Regra dinâmica:

“O estado S no tempo $t + 1$ da célula (i, j) é determinado pela soma V dos estados de sua vizinhança. Se V for maior que zero, a célula irá mudar para o estado $+1$, se for igual a zero o estado não é alterado e se for menor que zero, o estado muda para -1 .”

- Condição inercial:

“A ação do “estado interno”, a inércia, se da na seguinte maneira: Seja I o valor da inércia da célula (i, j) . Se $I \geq |V|$ o estado em $t+1$ permanece o mesmo que em t . Se $I < |V|$ a regra dinâmica é aplicada.”

Note que se a inércia é zero para todas as células do autômato a regra dinâmica é a única que precisa ser aplicada. Podemos escrever as regras na forma compacta:

$$S(t + 1, i, j) = \begin{cases} +1 & \text{se } V(t, i, j) > 0 \text{ e } V(t, i, j) > I(i, j) \\ -1 & \text{se } V(t, i, j) < 0 \text{ e } -V(t, i, j) > I(i, j) \\ S(t, i, j) & \text{se } V(t, i, j) = 0 \text{ ou } |V(t, i, j)| \leq I(i, j) \end{cases} \quad (2.1)$$

Aqui $S(t, i, j)$ é o estado do elemento (i, j) no tempo t , $I(i, j)$ é o valor da inércia do elemento (i, j) e $V(t, i, j)$ é a soma dos estados da vizinhança de (i, j) no tempo t . Neste trabalho não iremos considerar a possibilidade de I ser função do tempo.

Segundo a equação 2.1 temos que a força que um elemento sofre para mudar de estado é igual à soma dos estados de seus vizinhos, então podemos dizer deve vencer quem estiver em maior número na vizinhança do elemento, desconsiderando o estado 0. Por exemplo, se temos 3 vizinhos no estado -1, 4 no estado 0 e 1 no estado +1 (ver figura 2.2), a soma dos estados dos vizinhos $V(t, i, j) = -2$, portanto, o elemento (i, j) irá mudar para o estado -1 se sua inércia for menor que 2, $I(i, j) < 2$. Caso a inércia seja igual a 2 ou maior, o elemento mantém seu estado.



Nesse exemplo temos a célula central no estado 0, e sua vizinhança é composta por 4 elementos no estado 0, 3 no estado -1 e 1 no estado +1. De acordo com a regra determinística, o elemento central irá mudar para o estado -1 se, e somente se o valor de sua inércia for menor que 2, pois a soma dos estados da vizinhança é igual a 2. Caso o valor da inércia do elemento seja maior ou igual a 2, ele manterá seu estado.

Figura 2.2: Matriz para explicar a regra determinística. Cada cor representa um estado, branco representa o estado 0, cinza o estado -1 e preto o estado +1.

2.3 Quantidades que usaremos para caracterizar o AC

Para fazer uma análise da dinâmica do nosso modelo, utilizamos algumas quantidades que podem ser calculadas a partir da matriz do AC em cada tempo t . A primeira quantidade é a população de cada estado (p_+ para o estado +1, p_0 para o estado zero e p_- para o estado -1). Em cada tempo t , tal população representa a soma de todos os elementos do AC que se encontram no estado α ($\alpha = 0, \pm 1$). Por exemplo, temos uma matriz de ordem 22, então sua população total é igual a $p = N^2 = 484$ elementos, e se desses elementos 161 estiverem no estado 0, 161 no estado -1 e 162 no estado +1, dizemos então que a população do estado 0 é igual a $p_0 = 161$, do estado -1 é igual a $p_- = 161$ e do estado +1 é igual a $p_+ = 162$. O estudo da evolução das populações como função do tempo indica como a dinâmica do modelo afeta a quantidade de elementos em cada estado.

A segunda quantidade é a clusterização, que pode ser total (c) ou parcial (c_+ para o estado +1, c_0 para o estado zero e c_- para o estado -1). A clusterização mede o quão

“aglomerados” estão os elementos do AC, ou seja, o quanto elementos de mesmo estado estão próximos, formando “clusters”. Desta forma os parâmetros c e c_α quantificam a frequência desses “clusters” espalhados pelo AC. Obviamente que devemos esperar que a “clusterização” deva emergir da dinâmica do sistema. A clusterização é calculada da seguinte maneira:

$$c = \frac{1}{p} \sum_{i,j} [c]_{i,j} \quad (2.2)$$

$$c_+ = \frac{1}{p_+} \sum_{i,j} [c_+]_{i,j} \quad (2.3)$$

$$c_- = \frac{1}{p_-} \sum_{i,j} [c_-]_{i,j} \quad (2.4)$$

$$c_0 = \frac{1}{p_0} \sum_{i,j} [c_0]_{i,j} \quad (2.5)$$

Onde $[c]_{i,j}$, $[c_+]_{i,j}$, $[c_-]_{i,j}$ e $[c_0]_{i,j}$ medem a clusterização total, +1, -1 e 0 do elemento (i, j) , levando em conta o estado particular da célula (i, j) . Para calcular essas “clusterizações” parciais devemos primeiramente contar quantos vizinhos em cada estado o elemento na posição (i, j) possui. Então definimos:

$$[c]_{i,j} = \frac{\text{Quantidade de vizinhos do estado em maior número}}{\text{Quantidade total de vizinhos}} \quad (2.6)$$

Se a quantidade de vizinhos for igual para dois ou três estados diferentes, temos que $[c]_{i,j} \equiv 0$. Definimos α_{maior} como sendo o estado de maior população na vizinhança de (i, j) . A clusterização parcial de cada estado é definida da seguinte forma

$$[c_\alpha]_{i,j} = [c]_{i,j} \quad \text{se } S(t, i, j) = \alpha = \alpha_{\text{maior}} \quad (2.7)$$

. Em qualquer outra situação $[c_\alpha]_{i,j}$ é nulo.

Para exemplificar, utilizaremos o elemento central da figura 2.2. Este elemento está no estado zero, têm 4 vizinhos no estado zero, 3 no estado -1 e 1 no estado +1, então a clusterização total do elemento é $[c]_{i,j} = 0.5$, a clusterização do estado +1 é $[c_+]_{i,j} = 0$, a clusterização do estado -1 é $[c_-]_{i,j} = 0$ e a clusterização do estado zero é $[c_0]_{i,j} = 0,5$.

Finalmente, uma terceira quantidade relevante é o tempo de convergência (τ), que mede o tempo necessário (número de iteradas do AC) para que a partir daí a configuração de estados no tempo t seja igual à configuração no tempo $t + 1$. Essa configuração é chamada de configuração estacionária, pois a partir desse tempo $t = \tau$, nenhum elemento do AC muda de estado. Nem sempre um AC tende para uma configuração estacionária, e

assim dizemos que esse AC não converge, enquanto para os AC's que tem τ finito dizemos que convergem.

2.4 Geração de “ensemble” de matrizes iniciais para médias estatísticas do modelo

Para fazermos um estudo mais criterioso da evolução dinâmica do sistema e poder fazer médias estatísticas sobre quantidades relevantes, vamos trabalhar com um conjunto grande de matrizes iniciais, as quais serão submetidas à evolução do nosso AC. Fixamos o tamanho das matrizes em $N = 22$ (compromisso entre um tamanho que já mostra uma dinâmica rica, mas ao mesmo tempo pequena o suficiente para rápida evolução numérica).

Em nosso “ensemble” inicial dependendo de como o geramos podemos ter uma distribuição muito grande de valores para os parâmetros que iremos estudar (p_+ , c_+ , p_- , c_- , p_0 , c_0 , τ), dificultando a análise. Portanto na geração das matrizes iniciais fixamos alguns parâmetros para que a discussão fique mais simples. O primeiro parâmetro fixado é a população do estado zero (p_0), igual a $p_0 = 161$. Note que $p_0 = 161 \approx \frac{N^2}{3}$. Além disso, sempre tomamos o estado $+1$ como majoritário, ou seja, o de maior população (se isso não ocorre simplesmente multiplicávamos toda a matriz por -1). Note que como os estados $+1$ e -1 são análogos, os dois são estados ativos com mesmo peso na competição dinâmica, logo tanto faz assumir um ou outro em maior número inicialmente. Portanto, dessa maneira diminuimos a quantidade de parâmetros para analisar. O algoritmo de geração das matrizes é o seguinte:

- Para definir o estado de cada célula, escolhemos aleatoriamente um número racional x no intervalo $0 \leq x \leq 1$. Se $0 \leq x < 0,333\dots$, $S(t = 0, i, j) = -1$, se $0,333\dots \leq x < 0,666\dots$, $S(t = 0, i, j) = 0$ e se $0,666\dots \leq x \leq 1$, $S(t = 0, i, j) = +1$. Nesse processo aleatório temos probabilidade igual para a célula ficar inicialmente no estado $+1$, -1 ou zero;
- Para fixar a população de estados zero, mudamos o estado e elementos escolhidos aleatoriamente para zero, caso p_0 seja menor que a população que queremos, ou mudamos o estado destes elementos para $+1$ ou -1 , caso p_0 seja maior que a população desejada;
- Para tornar o estado $+1$ majoritário, caso isto ainda não seja verdade, multiplicamos a matriz por -1 .

Como utilizamos um processo de distribuição quase aleatória dos estados na matriz, podemos ter várias matrizes com mesmos valores de p_+ e c_+ , porém, incluímos no “ensemble” inicial apenas uma matriz com cada valor de p_+ e c_+ , para que cada ponto na distribuição das matrizes no espaço de parâmetros corresponda a apenas uma matriz.

Geramos dois conjuntos independentes de matrizes iniciais com o intuito de comparar as médias. O primeiro conjunto contém 71771 matrizes e o segundo contém 72083 matrizes. As figuras 2.3 e 2.4 representam a distribuição das matrizes de cada “ensemble” inicial no espaço de parâmetros $p_+ \times c_+$. Cada ponto nos gráficos representa uma matriz. A partir dessas figuras podemos notar que não temos uma distribuição homogênea, ou seja, não temos matrizes em todo o intervalo retangular $[0; 0,3] \times [162; 210]$. De fato, das figuras 2.5 e 2.6 (curva azul representa o primeiro conjunto e curva vermelha representa segundo conjunto) vemos que para certos valores de população e clusterização do estado +1 o número de matrizes é muito pequeno, acarretando um conjunto de matrizes iniciais não homogeneamente distribuído no espaço $p_+ \times c_+$. Isto é esperado, pois por exemplo, é muito difícil (ao menos em procedimentos aleatórios) obter uma matriz de baixo c_+ se p_+ for relativamente alto.

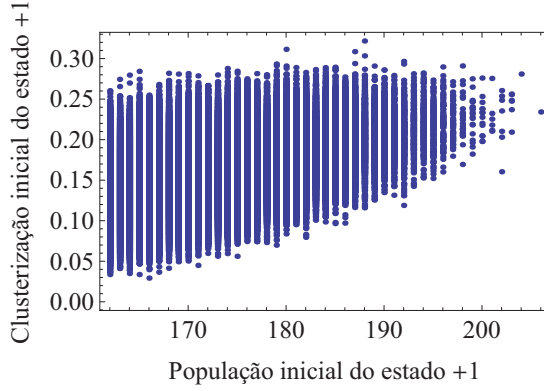


Figura 2.3: Distribuição das matrizes do conjunto 1 nos parâmetros p_+ e c_+ .

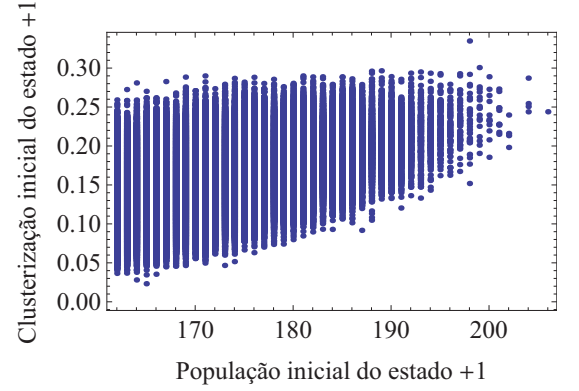


Figura 2.4: Distribuição das matrizes do conjunto 2 nos parâmetros p_+ e c_+ .

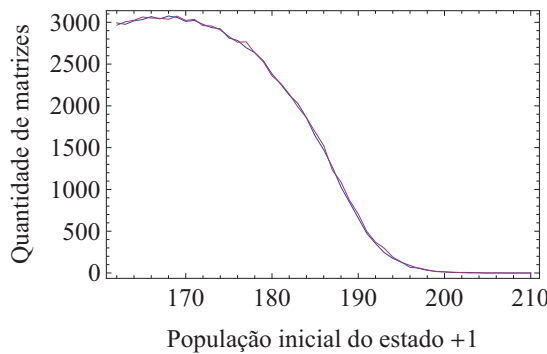


Figura 2.5: Quantidade de matrizes versus população inicial do estado +1.

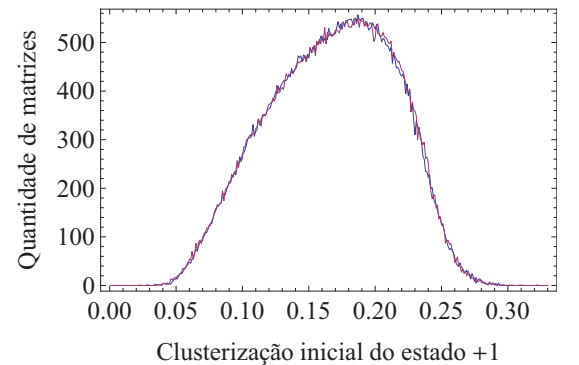


Figura 2.6: Quantidade de matrizes versus clusterização inicial do estado +1.

Como a maioria dos cálculos feitos são baseados em médias simples, devemos ter um conjunto de matrizes mais homogeneamente distribuído no espaço de parâmetros e por isso utilizaremos apenas as matrizes dentro do seguinte intervalo $162 \leq [p_+]_{\text{inicial}} \leq 182$ e $0,12 \leq [c_+]_{\text{inicial}} \leq 0,22$. O primeiro conjunto contém 39757 matrizes e o segundo contém

39655 matrizes no intervalo. As figuras 2.7 e 2.8 mostram para estes conjuntos reduzidos a quantidade de matrizes que têm mesmo número de população e clusterização, respectivamente. Assim temos agora um “ensemble” de matrizes mais homogêneo, com pouca variação na quantidade de matrizes para cada valor dos parâmetros p_+ e c_+ . Com esse conjunto mais homogêneo será possível fazer uma melhor análise da dinâmica do sistema. O preço a ser pago é que nossas conclusões estarão assim restritas a uma região particular do espaço de parâmetros.

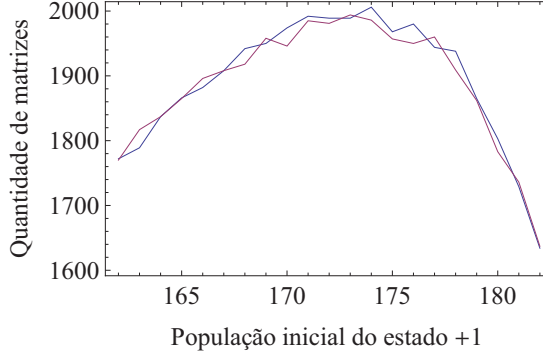


Figura 2.7: Quantidade de matrizes versus população inicial do estado +1.

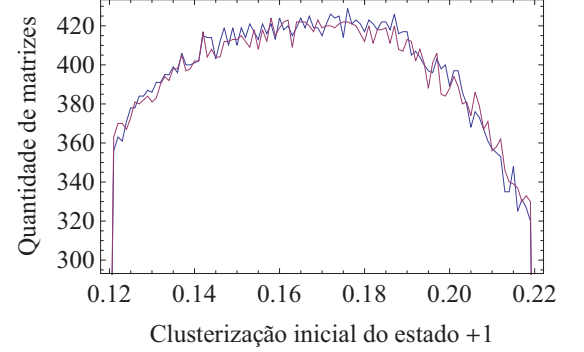


Figura 2.8: Quantidade de matrizes versus clusterização inicial do estado +1.

Trabalhando agora com os “ensembles” restritos ao sub-espaço de parâmetros como descrito anteriormente, podemos caracterizar alguns aspectos simples dos mesmos.

A figura 2.9 mostra a população média para matrizes de mesma clusterização. Para fazer a média, somamos a população de todas as matrizes com mesma clusterização e dividimos pela quantidade de matrizes com essa clusterização. Uma média similar é mostrada na figura 2.10, só que desta vez ao invés de somarmos a população, somamos a clusterização de todas as matrizes com mesma população e então dividimos pela quantidade de matrizes com essa população. A partir dessas figuras podemos notar alguns aspectos esperados, por exemplo, matrizes com clusterização mais alta, têm, na média, população mais alta. Da mesma forma, matrizes com população alta também tem clusterização média mais alta. Entretanto, tais valores médios parciais de população e de clusterização flutuam em torno da média de todas as matrizes, que é igual $[P_+]_{\text{média}} = 171.964$ e $[C_+]_{\text{média}} = 0.169357$ para o primeiro conjunto de matrizes e $[P_+]_{\text{média}} = 171.951$ e $[C_+]_{\text{média}} = 0.16942$ para o segundo conjunto de matrizes. Essa flutuação não é muito grande como pode ser visto nessas figuras. Os picos das distribuições vistos nas figuras 2.7 e 2.8 estão muito próximos dos valores médios $[P_+]_{\text{média}}$ e $[C_+]_{\text{média}}$. Além disso temos que o intervalo de valores ΔP na figura 2.7 (162-182) é aproximadamente 12% de $[P_+]_{\text{média}}$, logo com pequena dispersão de população. Já na figura 2.8 encontramos um ΔC da ordem de 58% de $[C_+]_{\text{média}}$. Mas isto é esperado, pois a clusterização pode flutuar muito mais para uma população fixa. Portanto, podemos concluir que os dois conjuntos acima descritos formam um bom “ensemble” inicial para nossos estudos, devido a sua homogeneidade na

distribuição das matrizes sobre seus dois principais parâmetros.

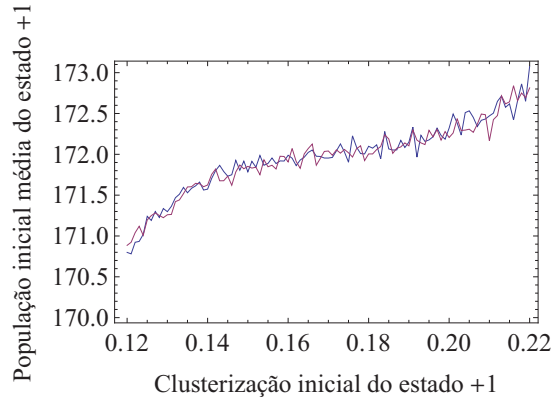


Figura 2.9: População inicial média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.

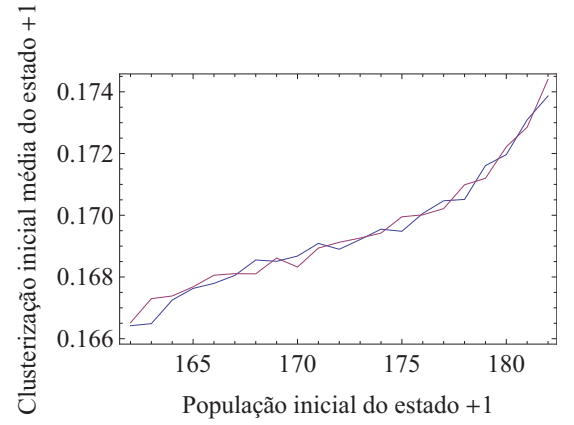


Figura 2.10: Clusterização inicial média do estado +1 versus população inicial do estado +1.

Finalmente mencionamos que além desse método de geração aleatória de matrizes iniciais, foi utilizado outro, onde foram construídas matrizes com padrões espaciais particulares. Tal procedimento será tratado no capítulo 7.

Capítulo 3

Inércia igual a zero para todos os elementos do AC

Neste capítulo analisamos a dinâmica do AC para matrizes geradas pelo método descrito no capítulo 2 e consideramos $I = 0$ para todos os elementos da matriz. Essa parte do estudo serve para entendermos como o AC evolui quando não existe inércia, como variam no tempo propriedades do sistema e se podemos identificar comportamentos característicos. Apresentaremos os resultados referentes aos dois conjuntos de matrizes iniciais, onde cada curva nos gráficos representa um conjunto. Chamaremos de matrizes finais aquelas que atingirem uma configuração estacionária após um tempo τ finito. Na verdade, temos duas situações distintas, as matrizes que convergem para uma configuração estacionária e matrizes que não convergem (matrizes que não tem uma configuração estacionária, ou seja, a matriz no tempo $t + 1$ é diferente da matriz no tempo t para todos os valores de t). Estudaremos apenas as matrizes que convergem. Para o primeiro conjunto de matrizes, 36146 matrizes atingem o estado estacionário (de um total de 39757) e para o segundo 36023 (de um total de 39655).

3.1 Resultados

Para analisar os efeitos da evolução do AC, estudaremos as distribuições dos parâmetros das matrizes finais, comparando-as com as distribuições das matrizes iniciais. Como trataremos apenas das matrizes que convergem para uma configuração estacionária, precisamos verificar se retirando as matrizes que não convergem, alteramos muito a homogeneidade na distribuição das matrizes no espaço de parâmetros. Por isso temos que comparar o “ensemble” das matrizes que convergem com o “ensemble” de todas as matrizes. Na figura 3.1 apresentamos a quantidade de matrizes que tem mesma população e na figura 3.2 mostramos a quantidade de matrizes que tem mesma clusterização. Podemos ver que os “ensembles” das matrizes que convergem mantêm a homogeneidade encontrada

no capítulo 2. As figuras 3.3 e 3.4 mostram respectivamente a população inicial média pela clusterização inicial e a clusterização inicial média pela população inicial. Onde também temos que esses gráficos são muito parecidos com os das figuras 2.5 e 2.6. Portanto das discussões do capítulo 2 concluímos que os presentes conjuntos de matrizes são apropriados para nossas análises.

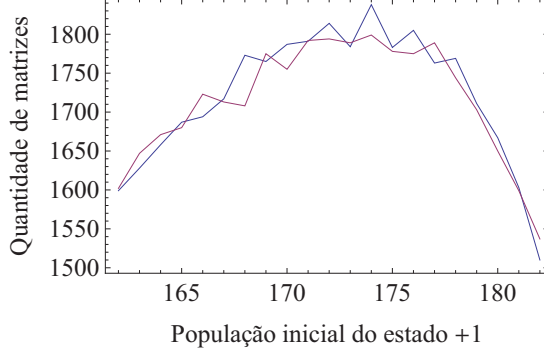


Figura 3.1: Quantidade de matrizes versus população inicial do estado +1;

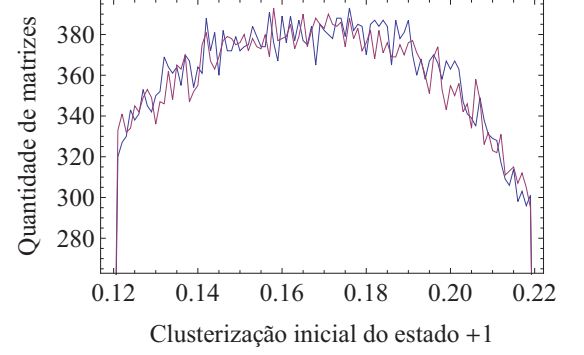


Figura 3.2: Quantidade de matrizes versus clusterização inicial do estado +1.

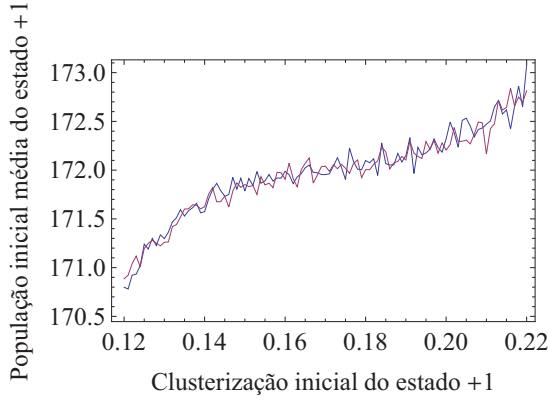


Figura 3.3: População inicial média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.

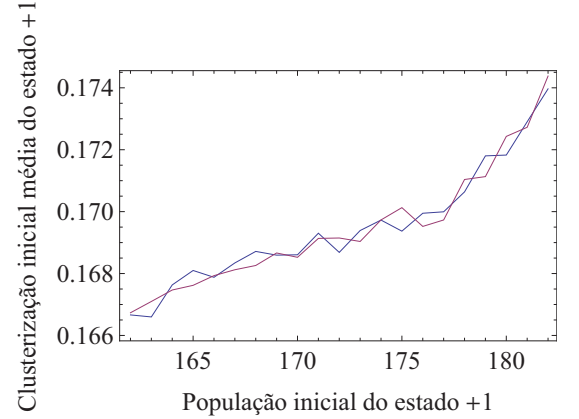


Figura 3.4: Clusterização inicial média do estado +1 versus população inicial do estado +1.

As figuras 3.5 e 3.6 mostram respectivamente a população e a clusterização do estado +1 na configuração estacionária versus a população inicial. A partir delas é possível notar que a população e a clusterização final média do estado +1 crescem linearmente com a população inicial. Sendo este um resultado já esperado, pois quanto maior a quantidade de elementos em um estado, mais facilmente estes dominarão a dinâmica no sistema e também formarão “clusters” com maior facilidade, aumentando assim a população e a clusterização final. A linearidade vem do fato de que, na média, a distribuição de estados α em sua vizinhança é $\bar{f}_\alpha = \frac{p_\alpha}{N}$. Então, se p_α cresce, \bar{f}_α cresce na mesma proporção e como a pressão dinâmica para mudar para o estado α é proporcional a \bar{f}_α , a linearidade segue.

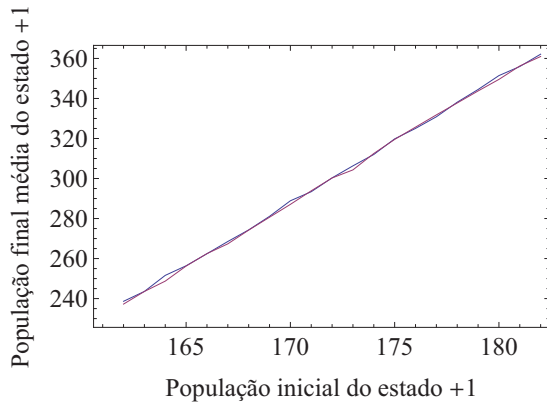


Figura 3.5: População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1.

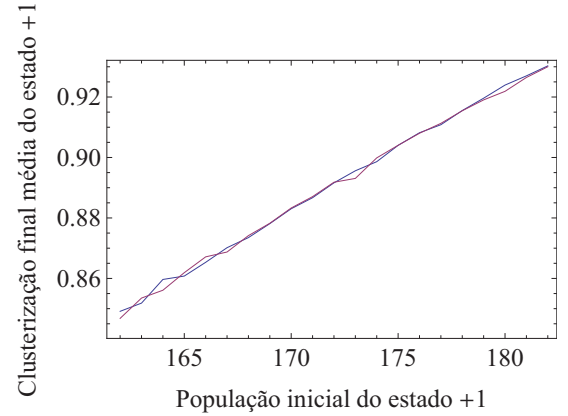


Figura 3.6: Clusterização final média do estado +1 versus população inicial do estado +1.

Nas figuras 3.7 e 3.8 podemos ver o valor da população final para todas as matrizes com população inicial igual a 162, 172 e 182. Já nas figuras 3.9 e 3.10 temos a clusterização final para as matrizes com os mesmos valores citados anteriormente para população. A curva de cor azul representa as matrizes com $[p_+]_{\text{inicial}} = 162$, de cor roxa representa as matrizes com $[p_+]_{\text{inicial}} = 172$ e de cor amarela representa as matrizes com $[p_+]_{\text{inicial}} = 182$. Essas quatro figuras servem para mostrar o perfil da população final e da clusterização final para matrizes com mesma população inicial. Aqui vemos que embora haja forte flutuação, matrizes com população inicial maior têm, na média, tanto população final quanto clusterização final mais alta, em concordância com o resultado visto nas figuras 3.5 e 3.6.

As figuras 3.11 e 3.12 apresentam, respectivamente, as curvas para população final média e clusterização final média do estado +1 versus a clusterização inicial. Podemos ver, a partir da figura 3.11, que a população final média diminui quando aumentamos a clusterização inicial, sendo que esse resultado aparenta ser algo contra-intuitivo, pois naturalmente poderíamos pensar que quanto mais clusterizados, ou seja, mais aglomerados estão os elementos de mesmo estado, mais facilmente eles dominariam o autômato. Mas isto não está acontecendo. Também temos que a clusterização final média diminui com a clusterização inicial, (figura 3.12), porém com um decréscimo pequeno.

Estes dois resultados nos levam a uma conclusão interessante: a clusterização inicial do estado +1 é um parâmetro que atua de forma inversa à população inicial (quando dentro de tal intervalo de variação de clusterização, ΔP_+ não é muito grande). Enquanto a população inicial faz a população e a clusterização finais crescerem linearmente, a clusterização inicial faz com que a população e a clusterização finais decresçam. Para entender isto note que nosso critério de clusterização diz o quanto, na média, um estado está aglomerado, mas não identifica se pequenos “clusters” estão distribuídos em toda matriz ou se temos “clusters” maiores concentrados em regiões particulares da matriz. Como

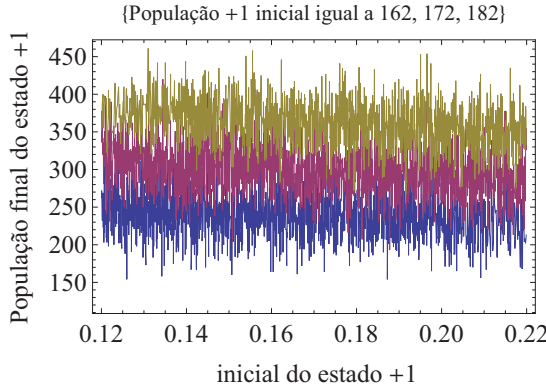


Figura 3.7: Perfil da população final para matrizes com população inicial igual a 162 (azul), 172 (roxo) e 182 (amarelo) do primeiro conjunto de matrizes.

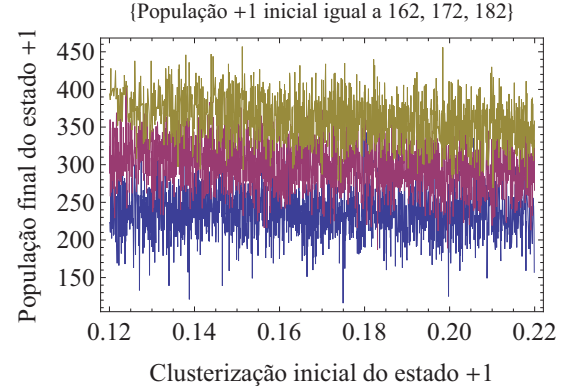


Figura 3.8: Perfil da população final para matrizes com população inicial igual a 162 (azul), 172 (roxo) e 182 (amarelo) do segundo conjunto de matrizes.

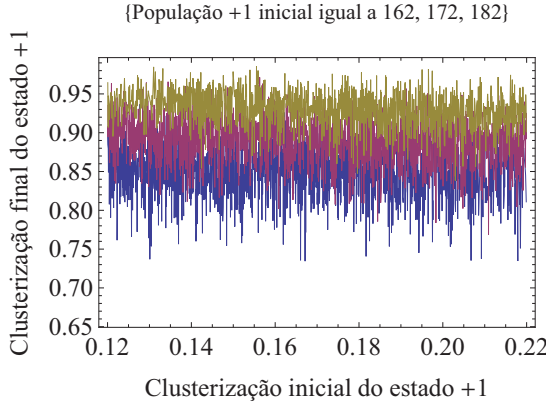


Figura 3.9: Perfil da clusterização final para matrizes com população inicial igual a 162 (azul), 172 (roxo) e 182 (amarelo) do primeiro conjunto de matrizes.

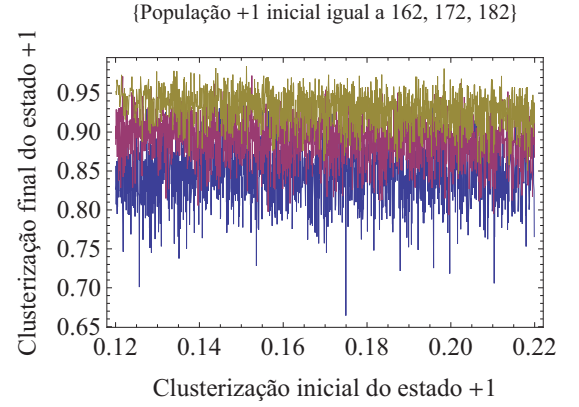


Figura 3.10: Perfil da clusterização final para matrizes com população inicial igual a 162 (azul), 172 (roxo) e 182 (amarelo) do segundo conjunto de matrizes.

estamos trabalhando com pequenas variações de ΔP_+ inicial (ver figura 2.7) então se c_+ inicial é maior, isto só se dá com uma localização espacial maior dos estados +1, ou seja, para aumentar o valor de c_+ inicial precisamos juntar os elementos +1 em clusters maiores, fazendo com que os elementos que antes estavam bastante distribuídos (c_+ baixo) se localizem em regiões específicas da matriz. Então, na dinâmica do AC, elementos +1 mais uniformemente distribuídos pela matriz (c_+ inicial baixo) aumentam sua população de forma mais homogênea (posteriormente também aumentando a clusterização) do que elementos aglomerados em regiões específicas da matriz, pois estes vão apenas aumentar sua população e clusterização na região que inicialmente se encontravam, enquanto no resto do AC o estado -1 tem o domínio. Portanto comparando essas duas configurações iniciais para clusterização (“clusters” pequenos mas distribuídos e “clusters” maiores mas localizados) teremos no final das contas que p_+ e c_+ finais serão maiores para c_+ inicial

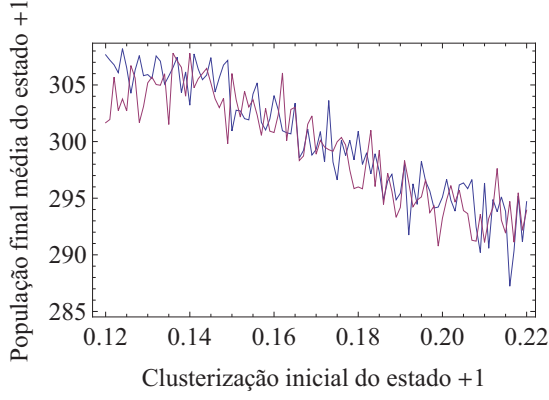


Figura 3.11: População final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.

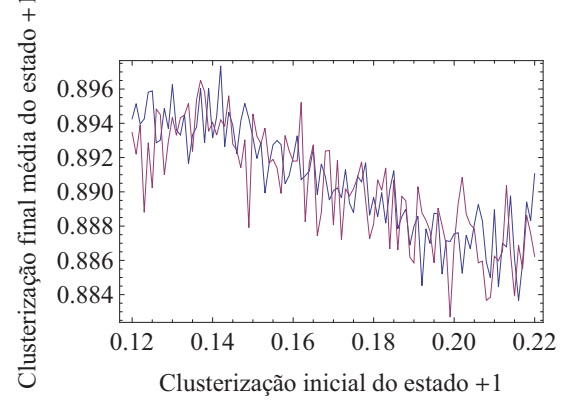


Figura 3.12: Clusterização final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.

baixo. Vale notar que todos os resultados aqui obtidos são feitos a partir de médias, então nem sempre um AC terá esse comportamento, mas na média, é esse o comportamento típico.

Para exemplificar a discussão acima realizamos um estudo em separado para ilustrar o efeito. Nesse exemplo construímos à mão as matrizes, de forma que os valores de p_+ , p_- e p_0 sejam iguais e os valores de c_+ , c_- e c_0 estejam muito próximos. Na construção, para uma matriz ter c_+ mais baixo, criamos vários “clusters” pequenos e espalhados pela matriz, enquanto para c_+ alto, construímos apenas um grande “cluster”, figuras 3.13 e 3.14. Na figura 3.13 temos uma estrutura espacial inicialmente com uma clusterização mais baixa ($c_+ = 0,563$, $c_- = 0,556$) e uma população de $p_+ = 100$ e $p_- = 100$, onde também é mostrado a evolução do AC. Na figura 3.14 temos uma outra estrutura espacial, com clusterização inicial mais alta ($c_+ = 0,84$ e $c_- = 0,84$) e mesma população que na configuração anterior ($p_+ = 100$ e $p_- = 100$). Se olharmos as curvas nas figuras 3.15, 3.16, 3.17 e 3.18, vemos que o aumento de população e de clusterização é maior para a configuração com baixa clusterização: o valor de p_+ e c_+ na configuração estacionária é maior para clusterização inicial mais baixa. Isto corrobora os resultados visto nas figuras 3.11 e 3.12.

Existe um outro fator que faz a população e a clusterização finais serem maiores para c_+ inicial baixo. Quando fazemos a médias de p_+ e c_+ finais para c_+ inicial, utilizamos todas as matrizes que tem mesma clusterização, ou seja, cada ponto das curvas das figuras 3.11 e 3.12 é referente à média de p_+ e c_+ finais para todas as matrizes que tem mesmo c_+ inicial. Dentre todas as matrizes que tem mesmo c_+ inicial, temos diferentes valores de p_+ inicial, variando de 162 a 182, que é o intervalo de população utilizado. Para um mesmo valor de c_+ inicial, p_+ inicial baixo dará p_+ e c_+ finais mais baixos, enquanto p_+ alto dará p_+ e c_+ finais mais altos. Mas para resultados médios o que importa é quanto vale $\delta P_+ = [p_+]_{\text{final}} - [p_+]_{\text{inicial}}$ como função de c_+ e p_+ . Através de investigação numérica

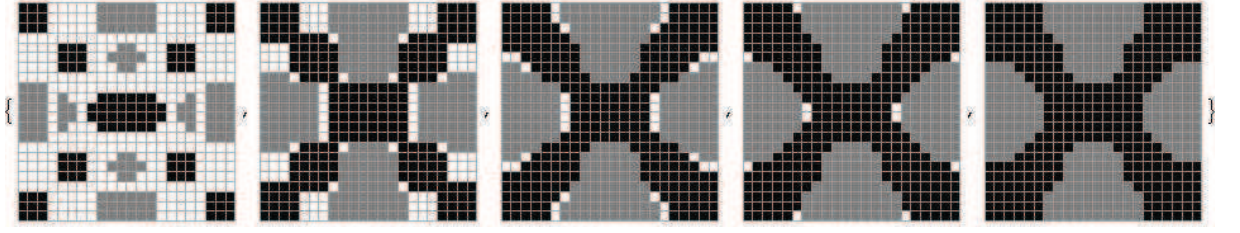


Figura 3.13: Evolução de uma matriz com $c_+ = 0,563$, $c_- = 0,556$, $p_+ = 100$ e $p_- = 100$.

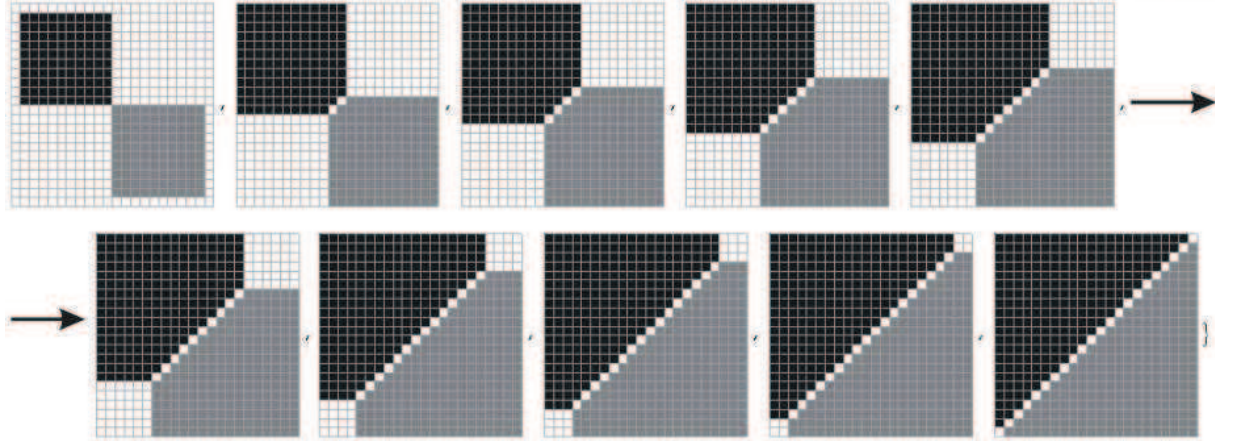


Figura 3.14: Evolução de uma matriz com $c_+ = 0,84$, $c_- = 0,84$, $p_+ = 100$ e $p_- = 100$.

encontramos que de forma geral δP_+ varia pouco com c_+ quando p_+ é pequeno. Mas δP_+ decresce mais sensivelmente com c_+ quando p_+ é grande. Este comportamento explica então as tendências das médias vistas nas figuras 3.11 e 3.12.

As figuras 3.19 e 3.20 mostram o tempo de convergência médio versus a população inicial e versus a clusterização inicial do estado +1, considerando apenas as matrizes que convergem para um estado estacionário. A partir dessas figuras podemos ver que o tempo de convergência aumenta com a população inicial e diminui com a clusterização inicial, o que significa que quanto mais elementos em um estado, mais demora para o autômato convergir, mas quanto mais aglomerados, mais rápido é tal processo. Para aprofundarmos essa análise, vamos considerar o tempo de convergência médio para matrizes com mesma população inicial. Também consideraremos o tempo de convergência médio para matrizes com mesma clusterização inicial. Porém restringimos as matrizes para se fazer as médias. A figura 3.21 mostra a quantidade de matrizes versus o tempo de convergência. Todas as matrizes iniciais convergiram no intervalo $3 \leq \tau \leq 43$ iteradas, porém a maior parte convergiu em 9 e 10 iteradas. O tempo de convergência médio do conjunto 1 é $\tau = 10.9657$ e do conjunto 2 é $\tau = 10.9802$.

Considerando agora a interpretação destes resultados, observamos nas figuras 3.22 e 3.23 a população inicial média e a clusterização inicial média do estado +1 versus o tempo de convergência. Se considerarmos apenas o intervalo $6 \leq \tau \leq 17$, onde encontramos no mínimo 1000 matrizes para cada tempo de convergência, novamente temos que os tempos

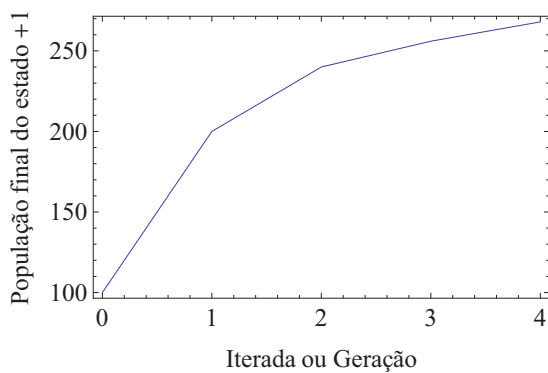


Figura 3.15: Evolução de p_+ do AC da figura 3.13.

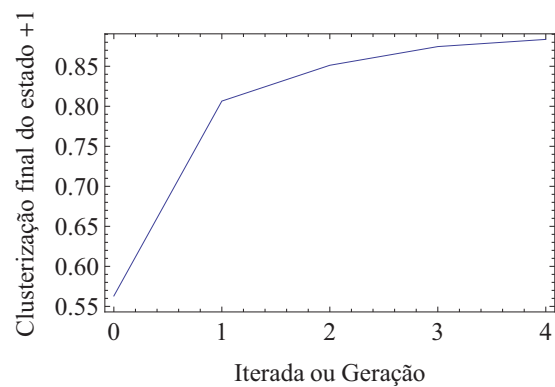


Figura 3.16: Evolução de c_+ do AC da figura 3.13.

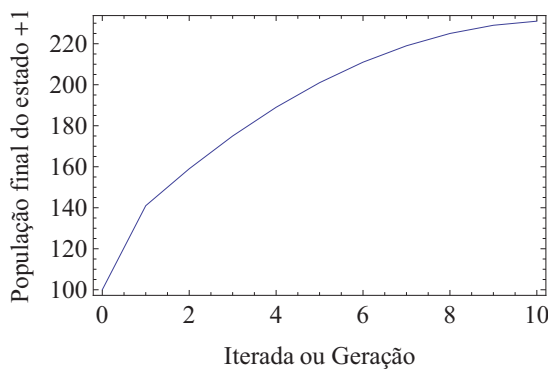


Figura 3.17: Evolução de p_+ do AC da figura 3.14.

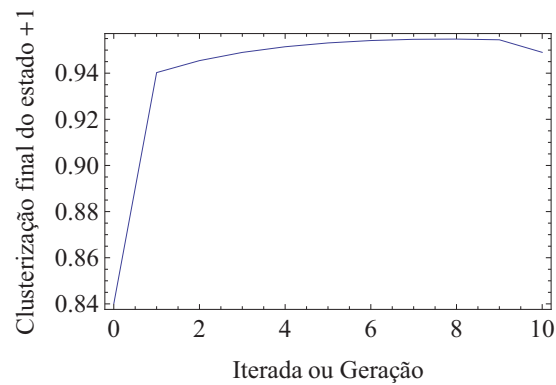


Figura 3.18: Evolução de c_+ do AC da figura 3.14.

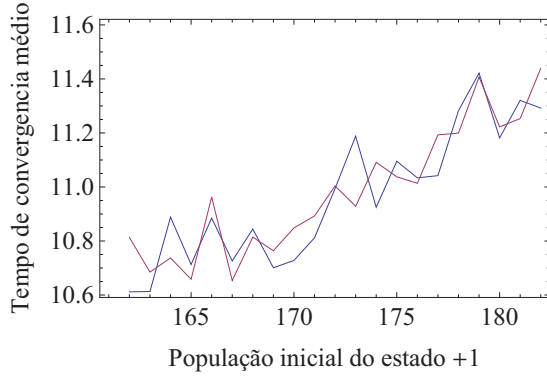


Figura 3.19: Tempo de convergência médio versus população inicial do estado +1.

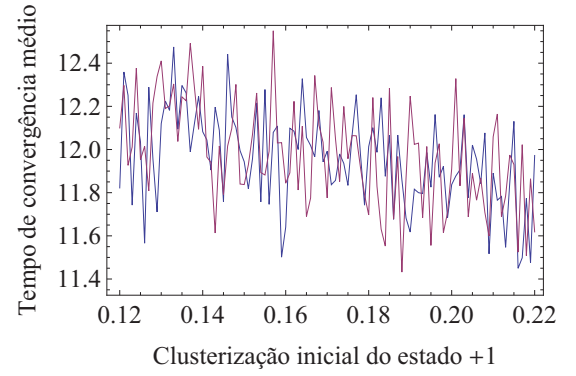


Figura 3.20: Tempo de convergência médio versus clusterização inicial do estado +1.

de convergência são maiores quando a população (clusterização) média inicial é maior (menor). O valor de τ aumentar com a população e cair com a clusterização é intuitivo. Matrizes típicas com maior população (mas não muito maior que o estado minoritário) acarretam uma maior dispersão dos elementos de mesmo estado, e assim o tempo que essas matrizes levam para chegar a um estado estacionário é maior. Estados mais localizados (c_+ maior), mais rapidamente evoluem para suas configurações estacionárias, pois apenas dominarão a região onde estão mais localizados, enquanto o resto da matriz será dominado pelo outro estado. Ao contrário, estados pouco localizados (c_+ menor), ou seja, com uma maior distribuição de estados na matriz, levam mais tempo para convergir.

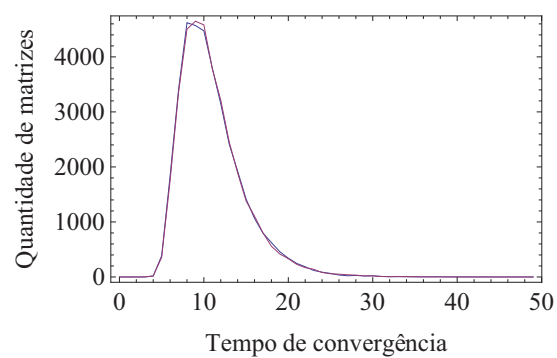


Figura 3.21: Quantidade de matrizes versus tempo de convergência.

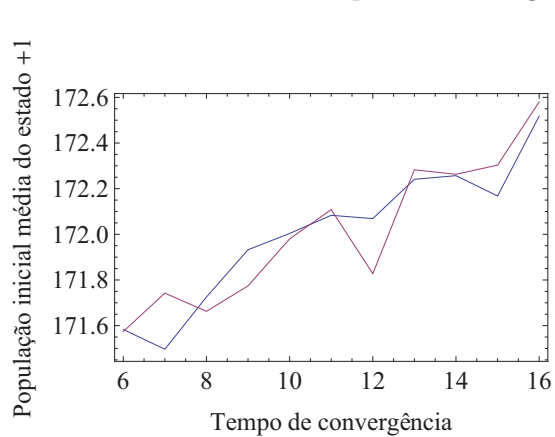


Figura 3.22: População inicial média do estado +1 versus tempo de convergência.

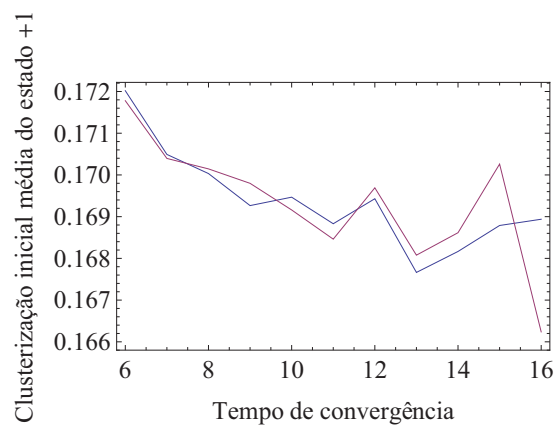


Figura 3.23: Clusterização inicial média do estado +1 versus tempo de convergência.

Capítulo 4

Comparação entre AC com diferentes valores de inércia

Neste capítulo iremos estudar os autômatos utilizando valores para a inércia maiores que zero ($I > 0$). Assumimos que a inércia é a mesma para todos os elementos de matriz, estando entre 1 e 8. A inércia muda a dinâmica de uma forma interessante, pois quando aumenta, naturalmente cria uma resistência à mudanças de estado. Assim, somente vizinhanças mais clusterizadas conseguem provocar trocas em sua região. No estudo realizado no capítulo 3, vimos que aproximadamente 90% do número total de matrizes do “ensemble” converge para um estado estacionário, sendo estudadas apenas este tipo de matriz. Lá também usamos dois conjuntos de matrizes iniciais, para efeitos de comparação e encontramos sempre resultados similares. Aqui portanto podemos ter confiança em usar apenas um “ensemble” (conjunto 1), já subtraído das matrizes que não convergem quando $I = 0$. Portanto usaremos 36146 matrizes iniciais.

4.1 Comparação entre diferentes valores de inércia

Aqui faremos as comparações das curvas dos parâmetros finais versus os parâmetros iniciais para os diferentes valores de inércia. Cada curva dos gráficos a seguir é referente a um valor de inércia e na legenda dos gráficos é mostrada a convenção entre a cor da curva e o valor de inércia utilizado. A figura 4.1 apresenta as curvas da população final média versus a população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia (de 0 a 8). Lembramos que inércia igual a zero corresponde aos resultados do capítulo anterior. Além disso, obviamente que para $I = 8$, o resultado é exatamente igual ao resultado obtido para a média sobre as matrizes iniciais pois não há dinâmica de troca nesta situação.

Primeiro vemos que para $I \geq 6$ as curvas são muito semelhantes entre si, o que seria de se esperar, pois temos alta inércia nesses casos. Notamos que podemos fitar uma reta do tipo $y = ax + b$ para cada curva e com isso podemos calcular o ângulo de inclinação

e o valor do coeficiente linear (ângulo de inclinação: $\theta = \arctan a$; coeficiente linear: b). Observando as figuras 4.2 e 4.3, que mostram o valor do ângulo de inclinação e o valor do coeficiente linear das retas fitadas para cada valor de inércia a partir das curvas da figura 4.1, encontramos que a inclinação da reta diminui e o coeficiente linear aumenta com a inércia, corroborando o que é esperado, pois quando aumentamos a inércia, o valor da população final difere menos da população inicial. Também podemos notar que a média da população final diminui com a inércia e que a influência que p_+ inicial tem sobre p_+ final diminui com a inércia, pois a inclinação dessas curvas diminui. Com isso podemos dizer que a diferença existente entre p_+ final para p_+ inicial diminui quando aumentamos a inércia.

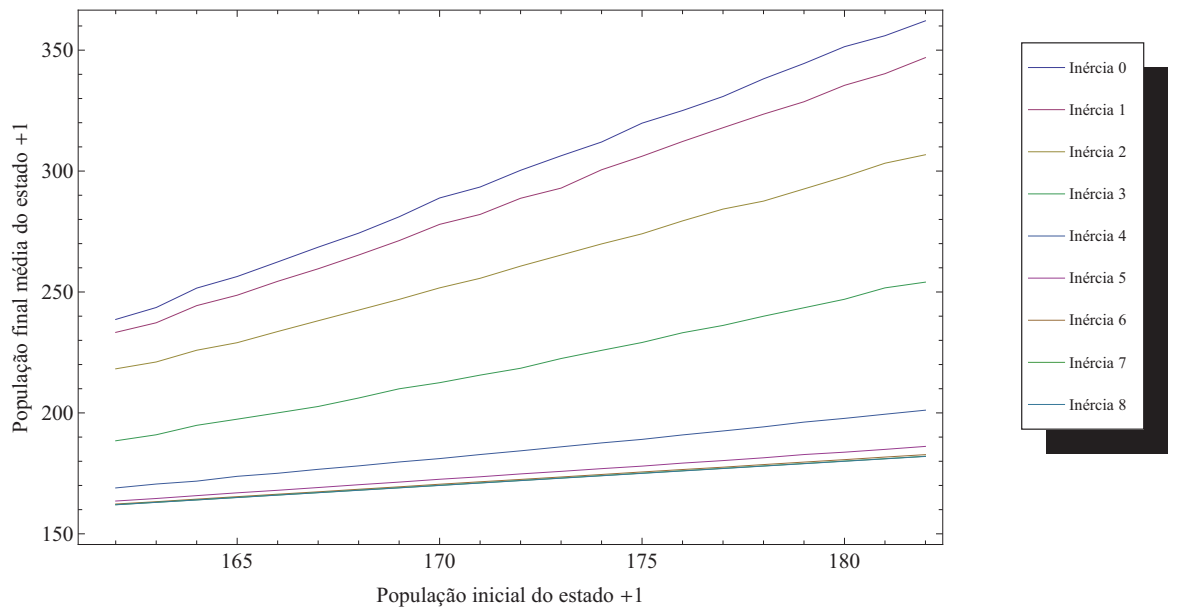


Figura 4.1: População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

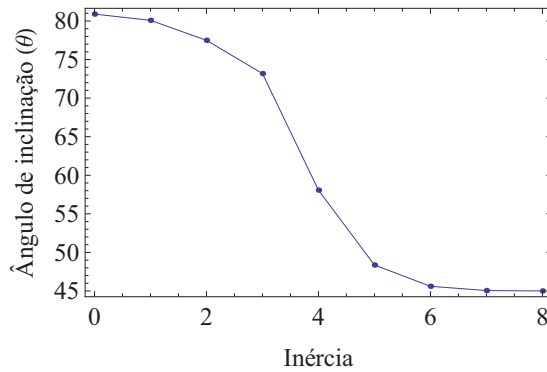


Figura 4.2: Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

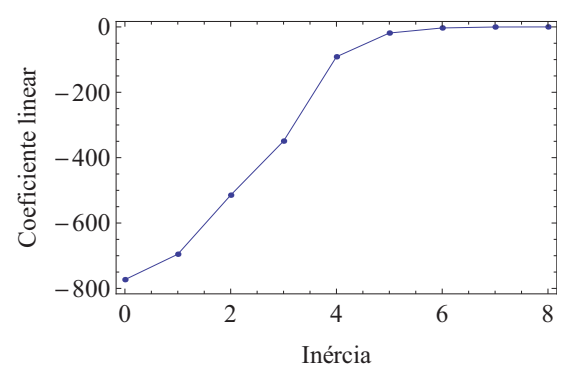


Figura 4.3: Coeficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

A figura 4.4 mostra as curvas da clusterização final média versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia. Como ocorre na figura 3.6 a linearidade da

clusterização final média é mantida, com isso podemos fitar retas do tipo $y = ax + b$ e podemos plotar o valor da inclinação da reta e do coeficiente linear encontrado. Esses valores são mostrados nas figuras 4.5 e 4.6. Observando essas figuras notamos que o ângulo de inclinação da reta aumenta quando a inércia é menor ou igual a 4 e diminui quando é maior que 4 e o coeficiente linear decresce quando a inércia é menor ou igual a 3 e cresce quando é maior que 3. Isto contrasta com o comportamento monotônico visto nas figuras 4.2 e 4.3. No caso em que $I \leq 4$ a influência de p_+ inicial sobre c_+ final aumenta. Porém se $I > 4$, essa influência decai. Para entender estes resultados todos note que no caso de $I \neq 0$, só uma vizinhança com $I + 1$ ou mais estados do mesmo tipo conseguirá mudar o estado central e assim a dinâmica de evolução torna-se extremamente sensível à população inicial. Aumentos de população inicial são fundamentais para permitir que os mecanismos de troca de estados atuem. No entanto, quando a inércia é igual a 5 a inclinação da reta diminui, mostrando-nos que a clusterização final começa a se desacoplar da população inicial, este desacoplamento se intensifica para valores de inércia ainda maiores. Neste caso passamos do ponto de saturação e agregar mais estados +1 à população inicial não altera muito as coisas, pois a inércia já é bastante alta.

A figura 4.7 mostra as curvas da população final média do estado +1 versus a clusterização inicial. Como as curvas dessa figura têm um aspecto aproximadamente linear, fitamos retas do tipo $y = ax + b$ para cada curva. As figuras 4.8 e 4.9 mostram respectivamente o valor da inclinação e o coeficiente linear de cada reta. É interessante ver que há uma inflexão no valor da inclinação da reta quando a inércia é igual a 4. Enquanto a inclinação é negativa (intervalo de inércia de 0 a 3) o valor da inclinação é praticamente constante, quando a inércia é igual a 4 a inclinação passa a ser positiva. À medida que aumentamos a inércia (para inércia maior que 4), a inclinação diminui. Outro aspecto interessante é que, em módulo, a inclinação é aproximadamente a mesma. Esses resultados mostram que enquanto a inércia é baixa (menor ou igual a 3), a população final média é menor para autômatos com maior clusterização (a razão para isto é explicada no capítulo anterior). Mas aumentando a inércia ($I \geq 4$) surge uma correlação positiva, embora pequena, entre a população final e a clusterização inicial. Isto se dá pois agora apenas regiões altamente “clusterizadas” podem promover criação de estados +1, assim, c_+ pode levar a pequenos incrementos em p_+ final.

Na figura 4.10 podemos ver as curvas da clusterização final média do estado +1 versus a clusterização inicial. Já nas figuras 4.11 e 4.12 temos respectivamente o valor da inclinação e o coeficiente linear das retas que foram fitadas a partir das curvas da figura 4.10. Observando essas figuras podemos concluir que à medida que aumentamos a inércia a clusterização inicial passa a influir de uma forma mais significativa sobre a clusterização final. Quando a inércia é igual a 5 temos uma inclinação máxima e para $I > 5$ essa inclinação tende a diminuir, sendo todas muito próximas de 45° , que é o caso para $I = 8$ (inércia máxima: parâmetros finais iguais aos iniciais). Note que tipicamente a clusteriza-

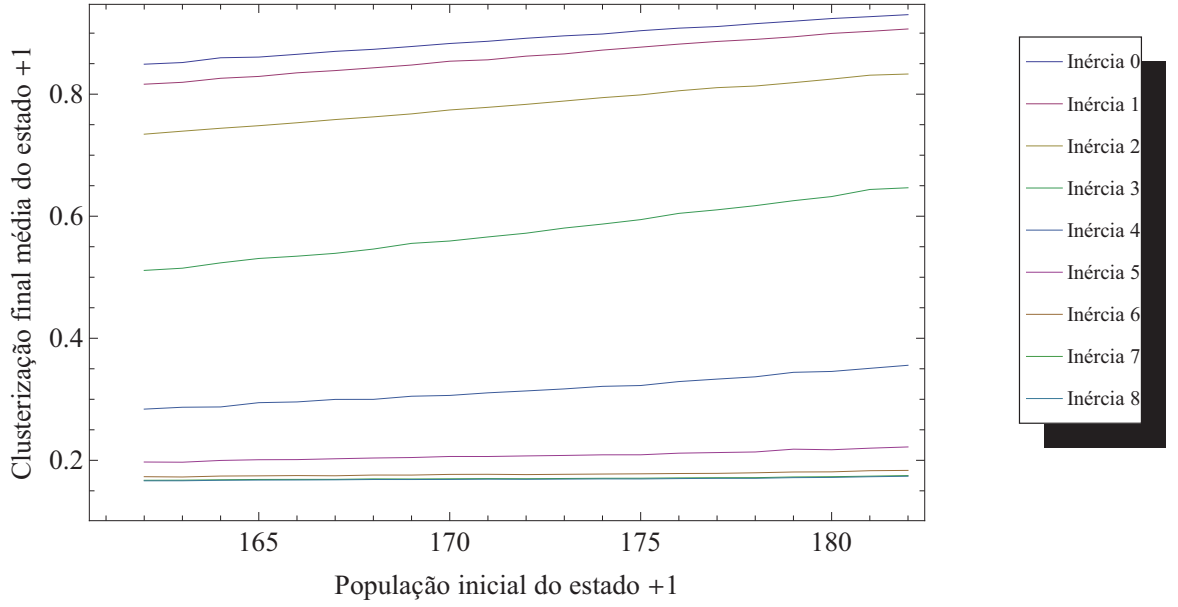


Figura 4.4: Clusterização final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia;

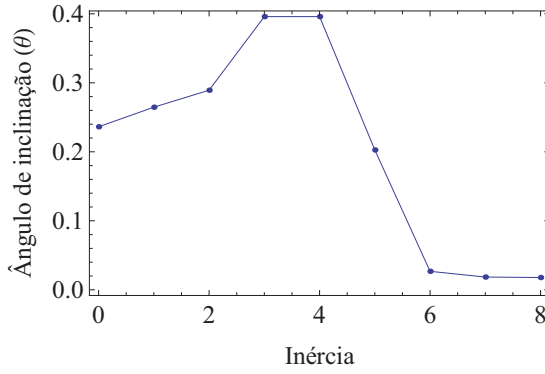


Figura 4.5: Ângulo de inclinação da reta da clusterização final média pela população inicial para todos os valores de inércia;

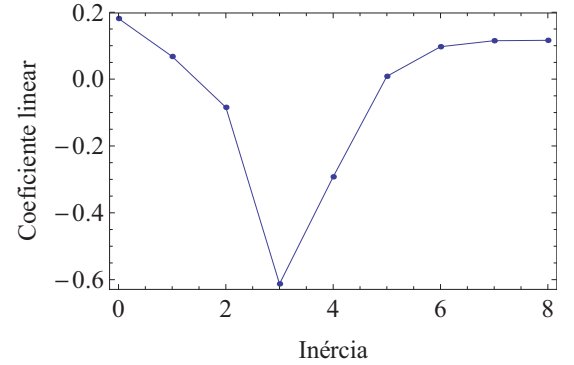


Figura 4.6: Coeficiente linear da reta da clusterização final média pela população inicial para todos os valores de inércia;

ção inicial não é tão relevante para definir a clusterização final quando a inércia é igual a zero, pois se observarmos a inclinação para inércia zero, ela é praticamente zero. Porém, a presença de inércia acopla então c_+ inicial com c_+ final de uma forma qualitativamente semelhante ao acoplamento de c_+ inicial com p_+ (compare as figuras 4.8 e 4.11).

A figura 4.13 mostra o tempo de convergência médio para todos os valores de inércia. Vemos que τ médio diminui com o aumento da inércia, um resultado esperado, pois aumentando a inércia, aumentamos a resistência à mudança, fazendo com que os elementos mudem menos vezes de estado, acarretando um decréscimo no tempo necessário para convergência. Quando a inércia é igual a 8, obviamente que o tempo de convergência é igual a zero, pois com resistência máxima, os elementos nunca irão mudar de estado, assim a configuração inicial é a configuração estacionária.

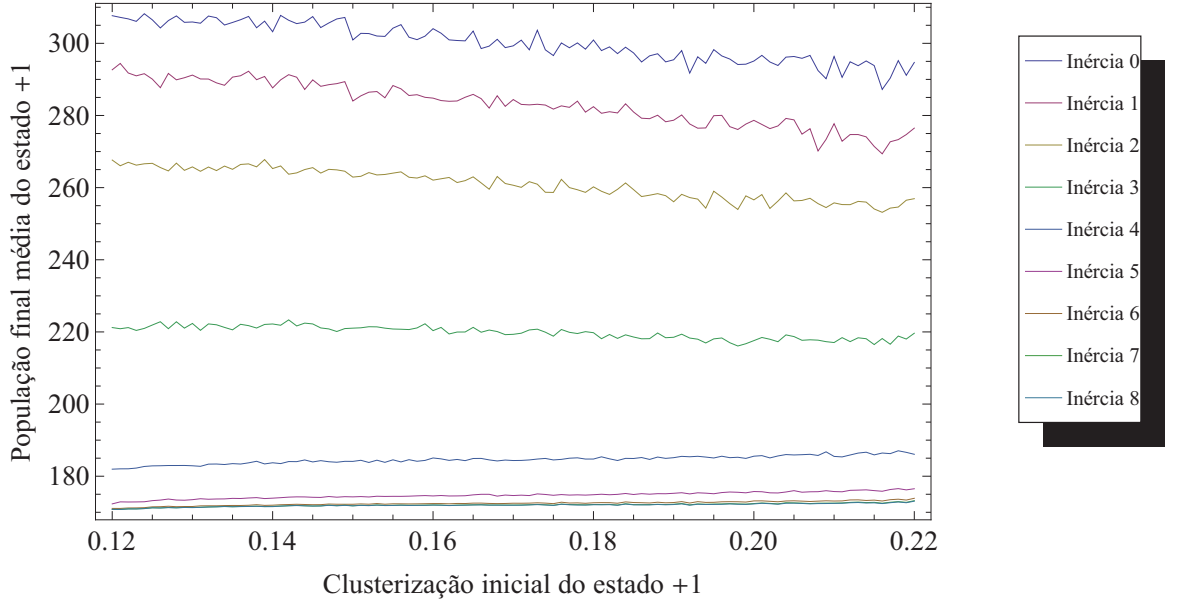


Figura 4.7: População final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

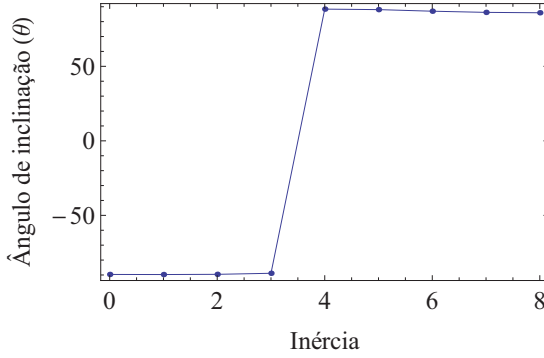


Figura 4.8: Ângulo de inclinação da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

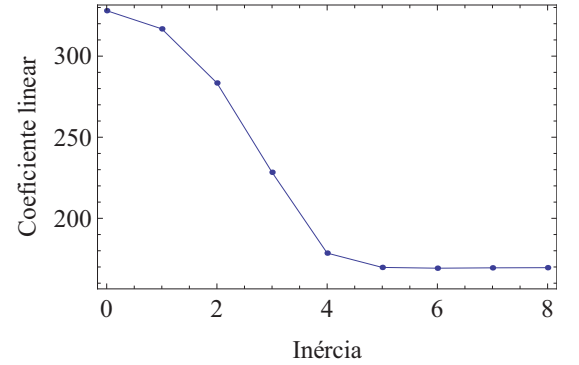


Figura 4.9: Coeficiente linear da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

A figura 4.14 mostra como um autômato típico evolui até chegar a sua configuração estacionária, variando o valor de inércia. A clusterização inicial desse autômato é $[c_+]_{\text{inicial}} = 0,169864$, a população inicial é $[p_+]_{\text{inicial}} = 172$ e o tempo de convergência quando a inércia é nula é igual a 9 iterações. Cada coluna de matrizes é uma geração, e cada linha é referente a um valor de inércia diferente. Com essa figura podemos notar que com o aumento da inércia fica mais difícil os elementos de mesmo estado se juntarem e formarem “clusters” e com isso a clusterização final de cada estado ativo diminui quando comparado com o caso de I menor. Como os elementos tendem a manter seus estados se a inércia é maior, temos que os elementos do estado +1 não conseguem dominar o autômato inteiro, com isso sua população final também diminui. Também podemos ver que para valores de inércia relativamente grandes ($I = 6, 7 \text{ e } 8$), o tempo de convergência

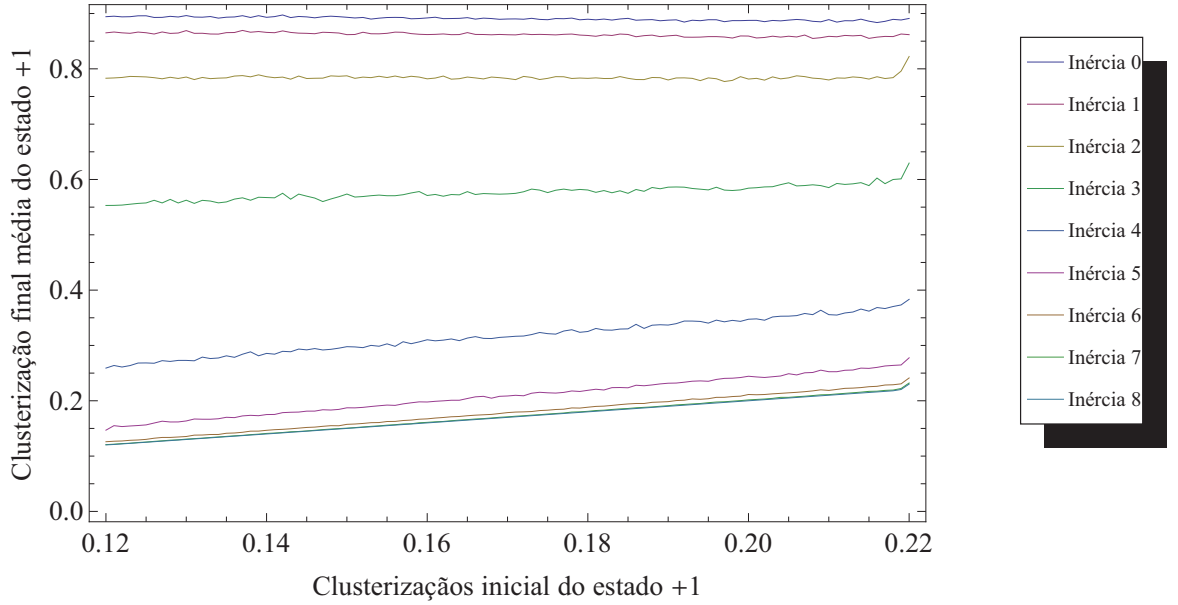


Figura 4.10: Clusterização final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

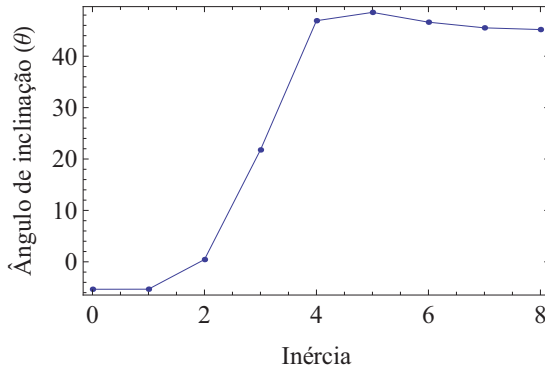


Figura 4.11: Ângulo de inclinação da reta da clusterização final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

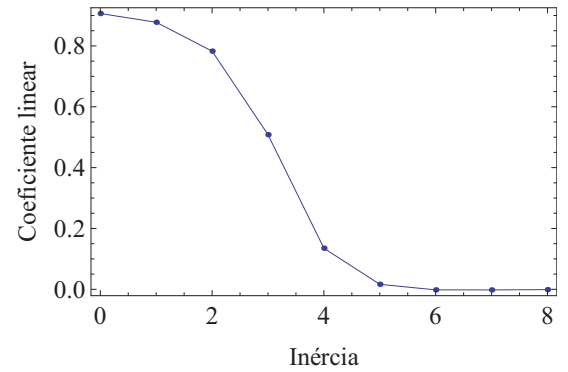


Figura 4.12: Coeficiente linear da reta da clusterização final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

é igual a zero, ou seja, aumentado a inércia, diminuimos o tempo de convergência médio. Outro fato notado é que o número de elementos no estado zero (estado passivo) aumenta quando aumentamos a inércia. Logo, a inércia é essencial para a sobrevivência de estados que não exercem pressão dinâmica de auto-replicação (ver discussão a seguir).

As figuras 4.15 e 4.16 representam o comportamento da população e da clusterização da matriz da figura 4.14 em cada geração para todos os valores de inércia. Observando esses gráficos, notamos que tanto a população quanto a clusterização aumentam a cada geração, e aumentando a inércia, esse crescimento se torna menor, chegando a não existir quando a inércia é igual a 8, pois o autômato não muda assim a configuração final é igual à inicial. Na figura 4.17 podemos ver que a quantidade de elementos no estado zero aumenta quando aumentamos o valor da inércia. Relembrando que com inércia zero, eles

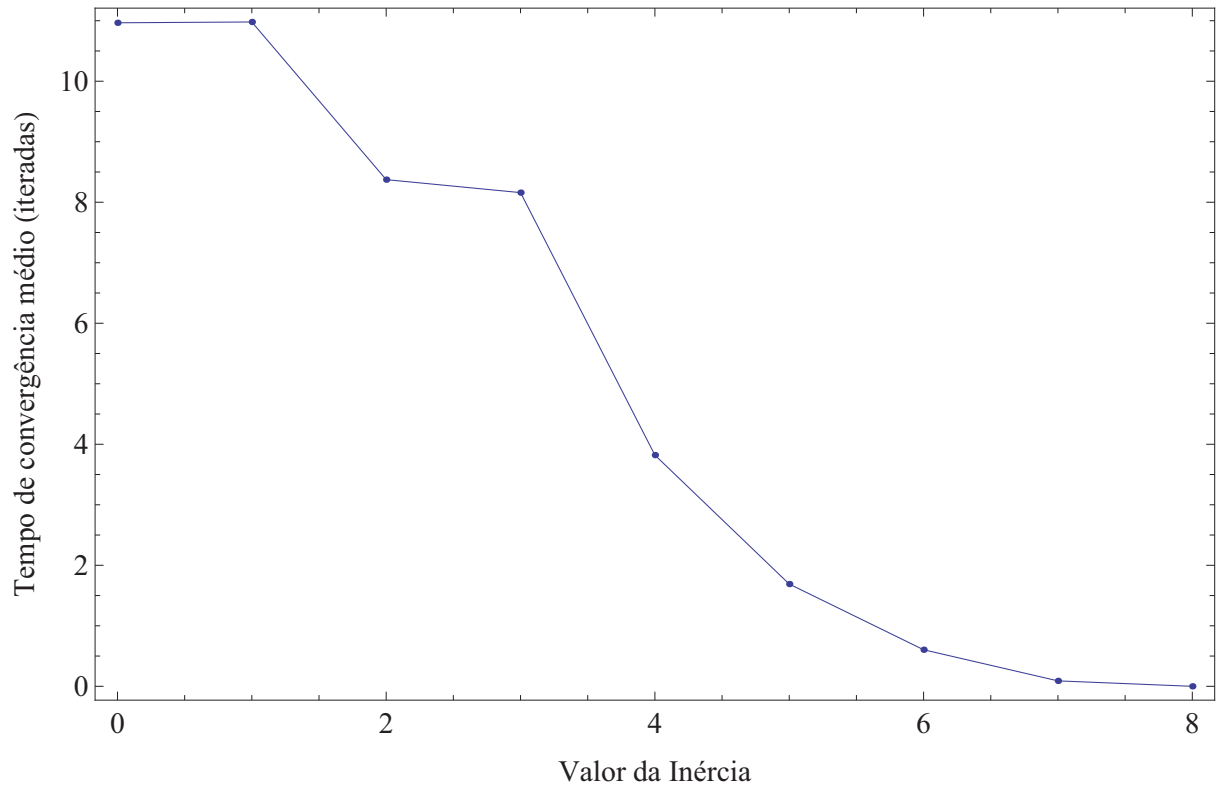


Figura 4.13: Tempo de convergência médio versus valor da inércia.

desaparecem. O estado zero não tem influência nenhuma sobre a dinâmica que força a mudança dos estados, por isso em geral desaparecem quando $I = 0$. Porém, com $I \neq 0$ tais estados podem resistir à pressão para mudança exercida por seus vizinhos, sobrevivendo na configuração estacionária do autômato. O valor de p_0 vai aumentando até chegar a seu valor máximo, que é igual à população inicial de elementos no estado zero.

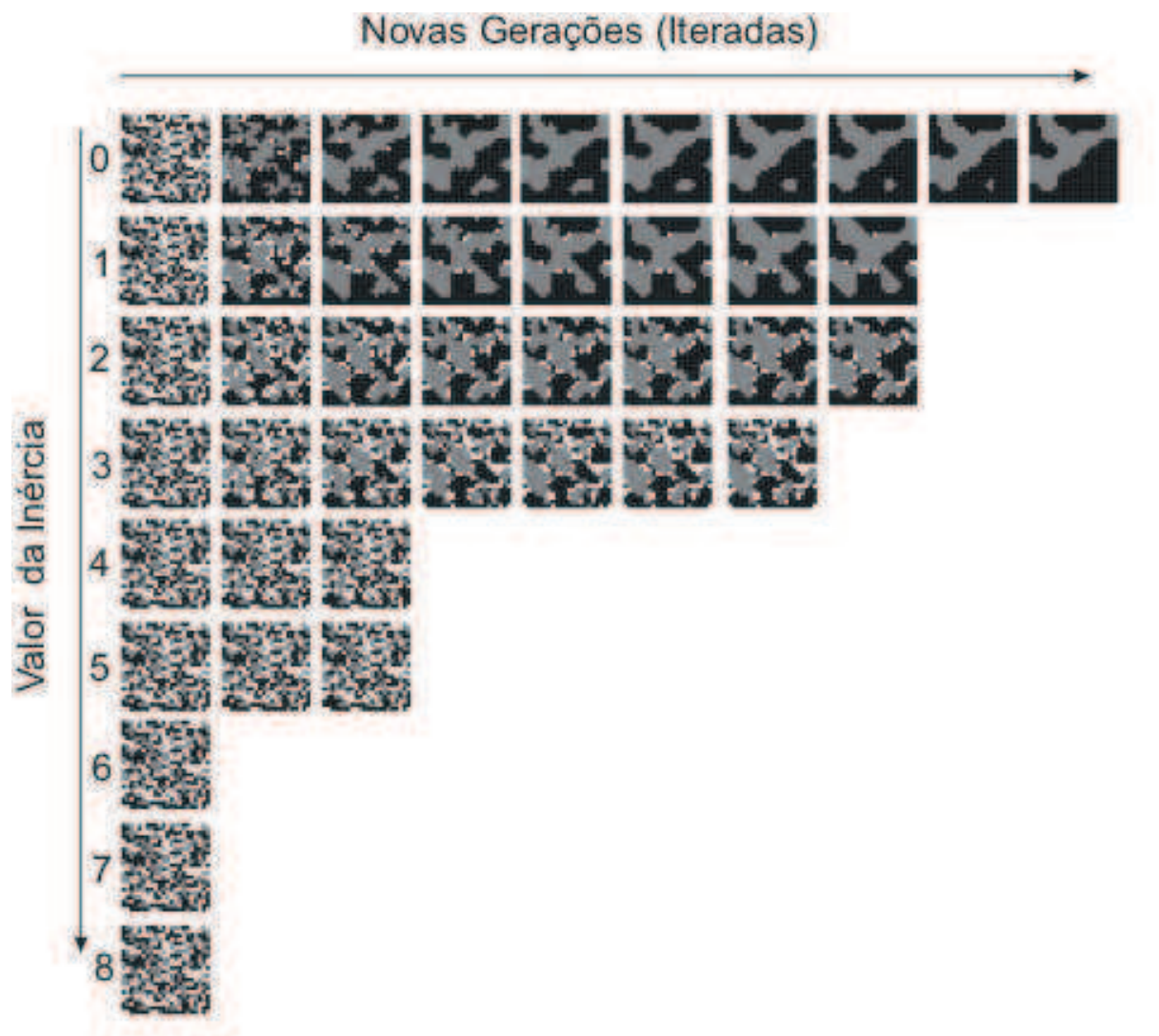


Figura 4.14: Evolução de um autômato com clusterização inicial do estado +1 igual a 0,169864, população inicial do estado +1 igual a 172 e tempo de convergência igual a 9 iteradas quando $I = 0$.

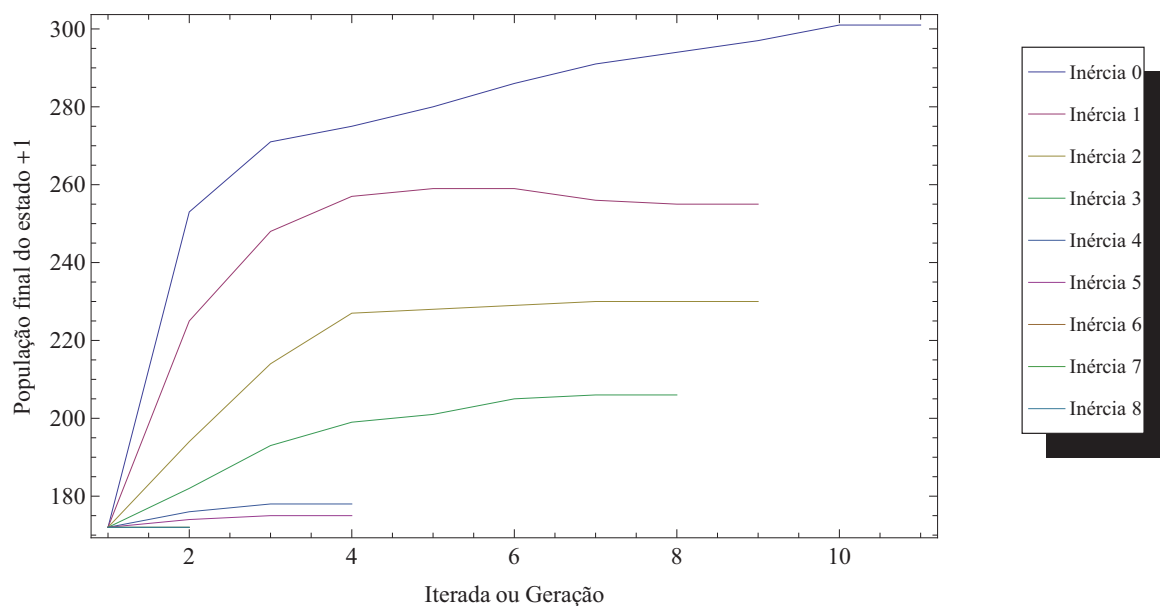


Figura 4.15: Evolução da população do estado +1 para todos os valores de inércia relativo à figura 4.14.

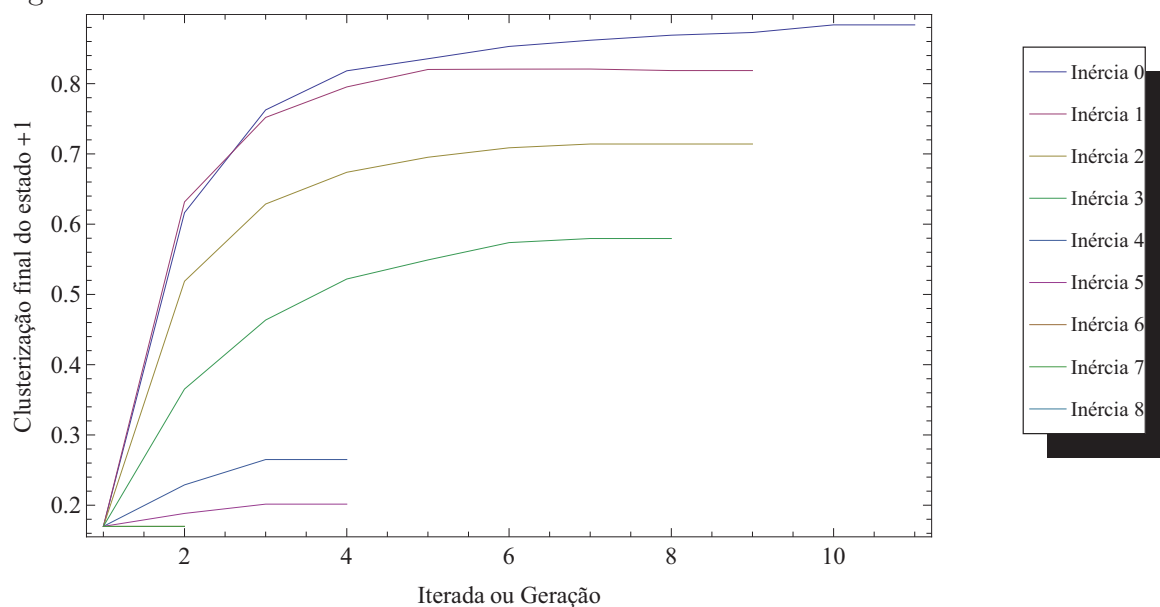


Figura 4.16: Evolução da clusterização do estado +1 para todos os valores de inércia relativo à figura 4.14.

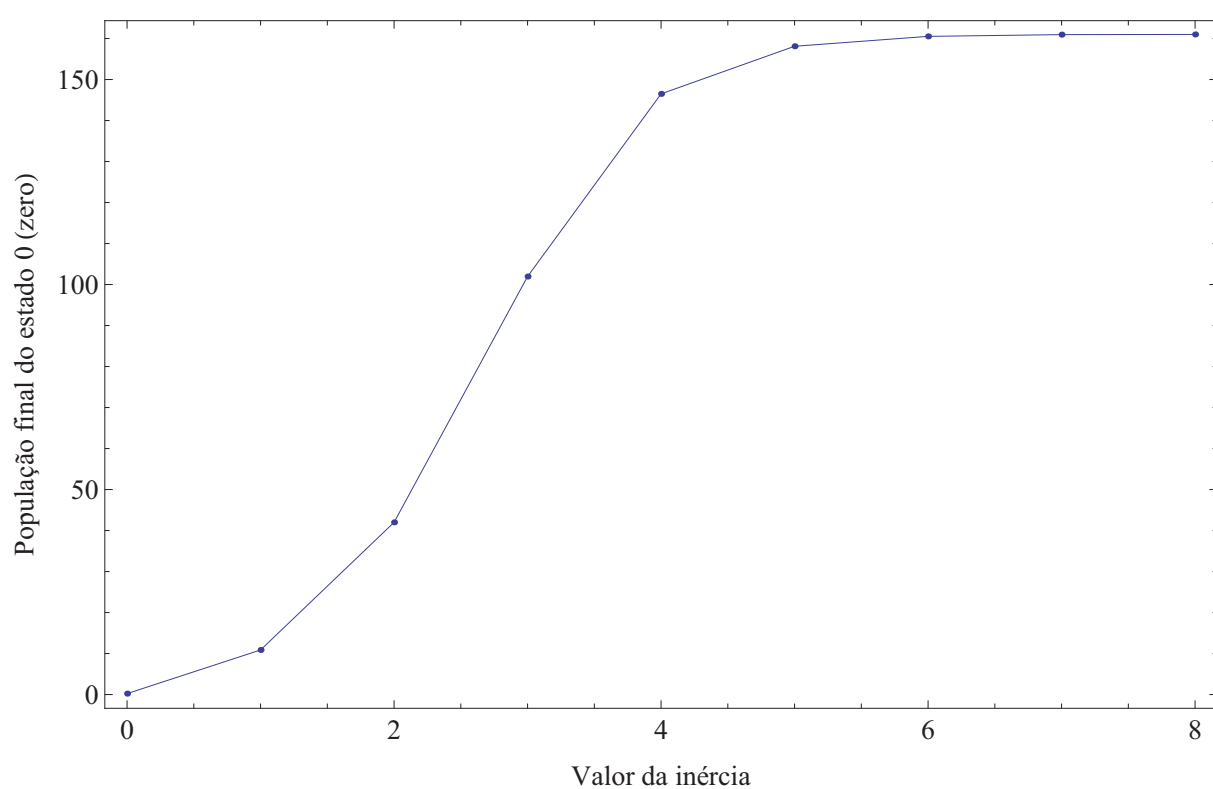


Figura 4.17: Média da população final do estado 0 versus o valor da inércia relativo à figura 4.14.

Capítulo 5

AC com padrões especiais para a distribuição de inércia

Neste capítulo utilizaremos as matrizes iniciais geradas pelo método descrito no capítulo 2 e ao invés de todos os elementos ter mesmo valor de inércia, assumiremos certas distribuições espaciais para a inércia. Discutimos dois possíveis padrões, que serão denominados tipo 1 e tipo 2. O interessante em considerar distribuições espaciais para inércia é que assim podemos formar grupos de células com diferentes resistências e cada grupo irá responder de forma diferente à regra determinística. Com isso queremos analisar como as células com maior resistência evoluem no autômato. Utilizaremos apenas o primeiro conjunto de dados iniciais do capítulo 2, pois os resultados são os mesmos para os dois conjuntos. Como nos capítulos anteriores, analisaremos apenas as matrizes que convergem.

5.1 Tipo 1: Inércia em blocos

O padrão de inércia do tipo 1 está representado na figura 5.1, sendo este padrão aplicado a todas as matrizes do primeiro conjunto de dados. Do conjunto de matrizes que foram evoluídas, apenas 433 matrizes não convergiram.

Tomando então apenas as matrizes que convergiram, nas figuras 5.2 e 5.3 mostramos respectivamente a quantidade de matrizes com mesma população inicial e a quantidade de matrizes com mesma clusterização inicial. Essas duas distribuições são novamente relativamente homogêneas, assim podemos usá-las para calcular médias de interesse, como foi feito nos capítulos 3 e 4.

A figura 5.4 mostra a média da população inicial para a clusterização inicial do estado +1 para o conjunto com todas as matrizes (curva vermelha) e para o conjunto de matrizes que convergem com o padrão de inércia do tipo1 (curva azul). Se compararmos a curva azul com a curva vermelha desta figura não vemos muitas diferenças, portanto temos aqui

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8

Figura 5.1: Representação da distribuição de inércia do tipo 1.

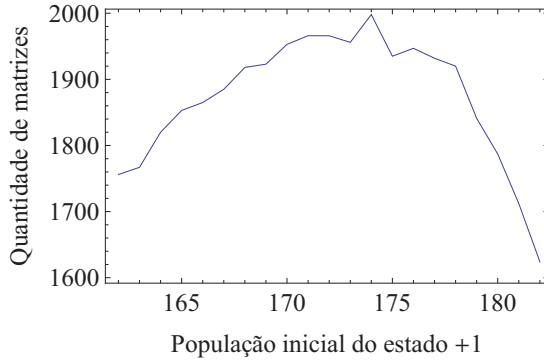


Figura 5.2: Quantidade de matrizes versus população inicial do estado +1.

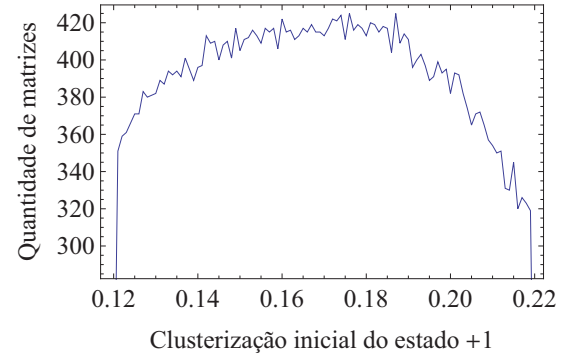


Figura 5.3: Quantidade de matrizes versus clusterização inicial do estado +1.

as mesmas conclusões que foram encontradas no capítulo 2: a população inicial média é maior para matrizes com clusterização maior. A média da população de todas as matrizes iniciais que convergem é igual a $[P_+]_{\text{média}} = 171,965$. Na figura 5.5 encontramos as curvas para a média da clusterização inicial em função da população inicial para o conjunto com todas as matrizes (curva vermelha) e para o conjunto de matrizes que convergem com o padrão de inércia do tipo1 (curva azul). Comparando as duas curvas, azul e vermelha, desta figura também não notamos muitas diferenças, portanto as conclusões aqui são as mesmas que no capítulo 2. Calculando a média da clusterização de todas as matrizes iniciais que convergiram utilizando a matriz inércia (figura 5.1), o valor difere pouquíssimo da média do conjunto de todas as matrizes ($[C_+]_{\text{média}} = 0,169356$ para as matrizes que convergiram e $[C_+]_{\text{média}} = 0,169357$ para todas as matrizes, isto é, incluindo as 433 que não convergiram).

As figuras 5.6 e 5.7 representam a população e a clusterização finais médias versus a população inicial do estado +1, a partir delas observamos que o tipo de crescimento visto em outras configurações da matriz inércia é mantido, ou seja, a população final média

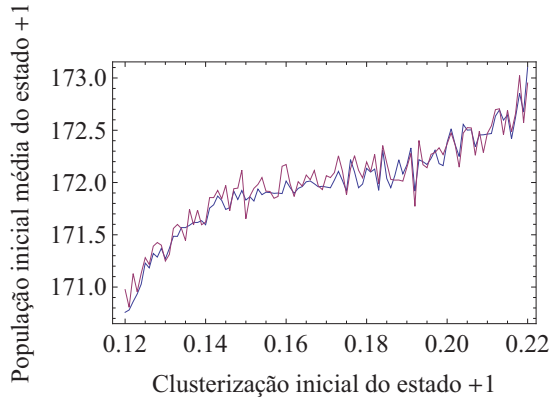


Figura 5.4: População inicial média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.

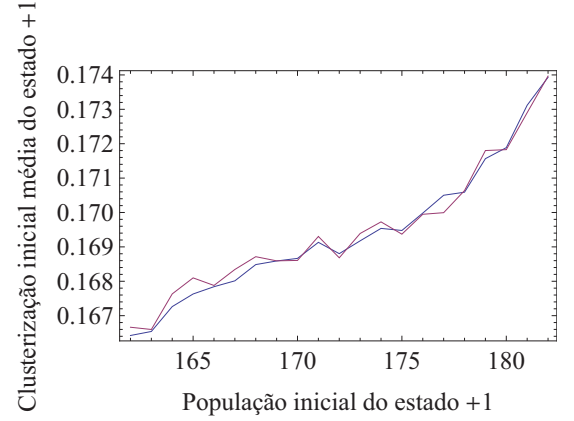


Figura 5.5: Clusterização inicial média do estado +1 versus população inicial do estado +1.

crece linearmente com a população inicial e a clusterização final média também cresce linearmente com a população. Isso é um fato relevante, pois apesar de agora termo um padrão (embora simples) na distribuição da inércia, a linearidade não foi afetada. Uma possível explicação é que localmente, em cada bloco de inércia, a resposta é linear, logo a linearidade por pedaços acaba se estendendo a todo o sistema.

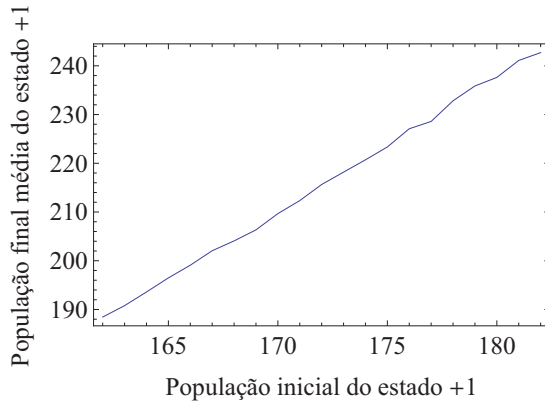


Figura 5.6: População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1.

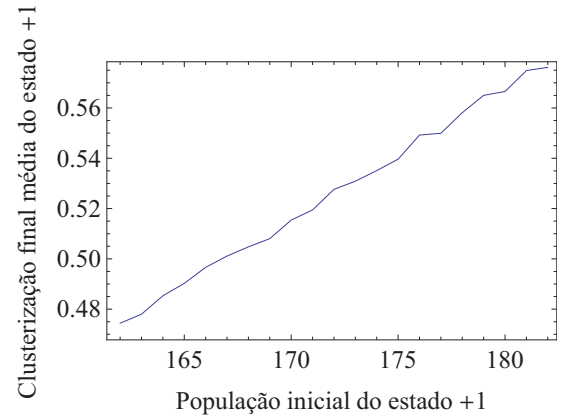


Figura 5.7: Clusterização final média do estado +1 versus população inicial do estado +1.

Outro fato interessante pode ser visto na figura 5.8, onde notamos que o decréscimo da população final média em relação à clusterização inicial, que ocorre para $I = \text{cte}$ e não muito grande também ocorre aqui. Portanto, para essa configuração de inércia com “clusters” regionais de inércia, pode parecer que temos uma dinâmica similar à dinâmica para inércia igual para todos os elementos. Mas se olharmos a figura 5.9 vemos que a clusterização final média cresce quase que linearmente com a clusterização inicial, que é um resultado distinto do observado previamente nos capítulos 3 e 4.

Com isso temos que a população inicial dita um crescimento linear tanto da população

final média quanto da clusterização final média, ou seja, matrizes com clusterização inicial mais alta, tem uma menor população final média, mas uma clusterização final média maior. Isto provavelmente se deve ao fato de que como agora a inércia é clusterizada, então há uma potencialização da importância da clusterização inicial do AC, assim gerando uma correlação positiva entre clusterização inicial e final. Notamos também que ao inspecionarmos a figura 4.10 fica claro que c_+ inicial passa a influenciar o valor de c_+ final quando a inércia cresce. Como no presente caso temos regiões onde a inércia assume valores maiores, então nosso argumento qualitativo acima se sustenta.

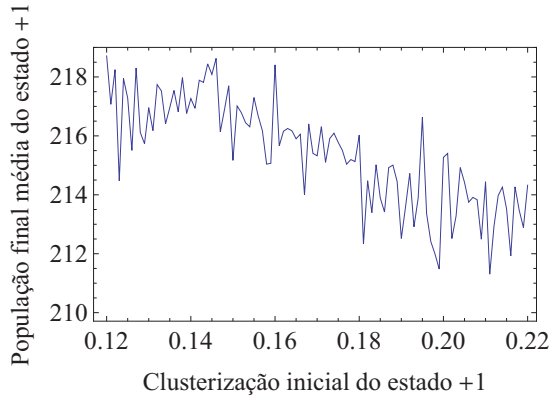


Figura 5.8: População final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.

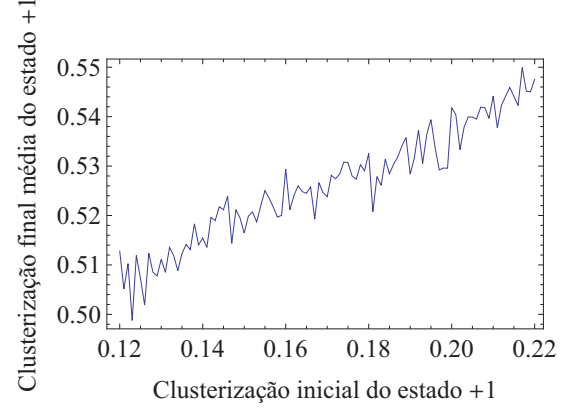


Figura 5.9: Clusterização final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.

As figuras 5.10 e 5.11 mostram o tempo de convergência médio versus a população inicial e versus a clusterização inicial. Se compararmos essas curvas com as curvas das figuras 3.19 e 3.20 vemos que os comportamentos são muito similares, ou seja, τ médio para a distribuição de inércia do tipo 1 tem a mesma tendência que o τ médio para $I = 0$, sugerindo que essa distribuição de inércia não altera a forma com a qual p_+ e c_+ iniciais influenciam no τ médio. Então as conclusões obtidas aqui são as mesmas que as encontradas no capítulo 2: p_+ inicial maior leva a um τ médio maior e c_+ inicial maior leva a um τ médio menor. Mas há um detalhe interessante a se observar, o tempo de convergência para a presente distribuição de inércia é menor que τ médio para $I = 0$. Isto se deve ao fato de que como temos blocos com inércia maior que zero, o tempo que esses blocos levam para chegar a uma configuração estacionária local é menor àquele comparado com uma matriz onde esses blocos não existam, portanto isto diminui na médio o tempo de convergência.

A partir de todos estes resultados podemos concluir que para um AC com inércia de padrão tipo 1, o comportamento dos parâmetros finais é muito similar ao comportamento de inércia igual a zero para todos os elementos. A maior diferença sendo como c_+ final depende de c_+ inicial. De fato, ao invés de um decréscimo temos um crescimento quase que linear de c_+ final com c_+ inicial. Portanto podemos dizer que para o caso onde a

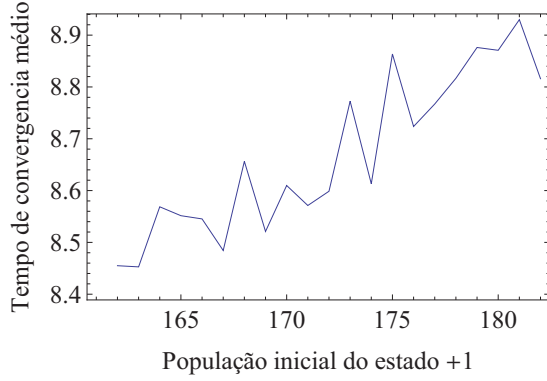


Figura 5.10: Tempo de convergência médio versus população inicial do estado +1;

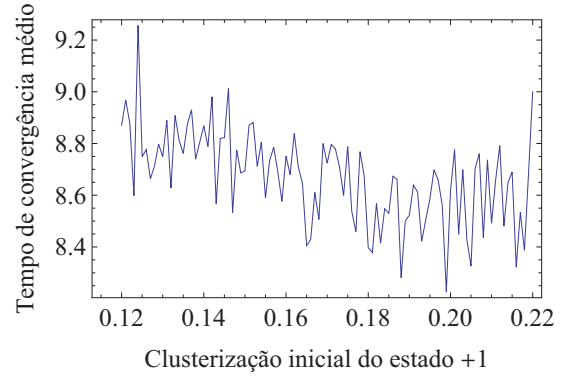


Figura 5.11: Tempo de convergência médio versus clusterização inicial média do estado +1;

distribuição de inércia ocorre em blocos homogêneos, então, em geral o domínio do estado +1 é mais fortemente ligado ao valor de p_+ inicial e diferente do caso em que $I = 0$, temos que c_+ inicial passa a ter um papel mais importante.

Na figura 5.12 podemos ver como uma matriz escolhida aleatoriamente entre todas as matrizes que convergiram evolui. Essa matriz tem população inicial igual à $[p_+]_{\text{inicial}} = 172$ e clusterização inicial igual a $[c_+]_{\text{inicial}} = 0,16531$. Observamos que os blocos de elementos que tem inércia baixa conseguem formar clusters, enquanto os outros blocos tendem a ser menos clusterizados, com estados mais distribuídos e com a não formação de um estado majoritário. Outro aspecto relevante é que os elementos no estado zero sobrevivem mais e mais nos blocos onde I é maior.



Figura 5.12: Evolução de um autômato típico com clusterização inicial do estado +1 igual a 0,16531, população inicial do estado +1 igual a 172 e tempo de convergência igual a 6 iteradas.

5.2 Tipo 2: Uma única região com $I \neq 0$

O padrão de inércia do tipo 2 está representado na figura 5.13, onde $I = i$ é o valor que a inércia pode assumir (0 a 8) no bloco central. Utilizamos nesta seção apenas $i = 1, 2, 3, 4$. Essa configuração de inércia serve para observarmos a dinâmica do autômato quando

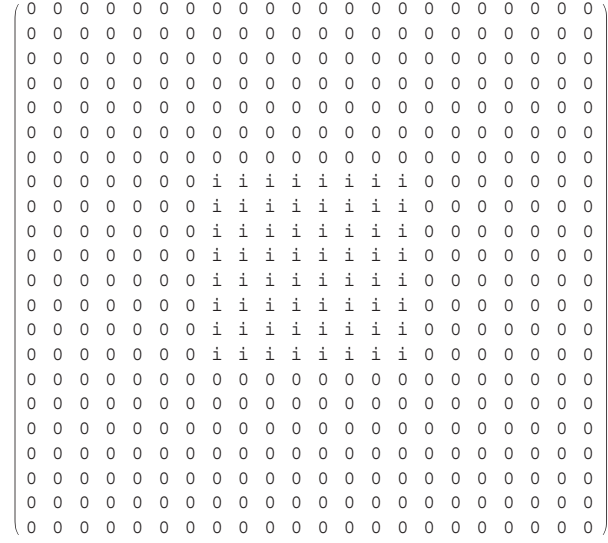


Figura 5.13: Representação da distribuição de inércia do tipo 2.

colocamos um bloco de elementos no centro com inércia maior que zero. Queremos ver como que esse bloco especial localizado influi na dinâmica global do AC.

Como já feito em outros capítulos, iremos analisar apenas o caso das matrizes que convergem para um estado estacionário. Porém, agora temos um caso um pouco diferente, pois à medida que aumentamos a inércia, o número de matrizes que converge diminui. A quantidade de matrizes que converge em função do valor de i está mostrado na figura 5.14, onde vemos que realmente o número de matrizes que converge diminui, porém, há um leve aumento desse número quando $i = 1$. Mencionamos que a peculiaridade de o número de matrizes que convergem crescer quando $I = 1$ é fácil de entender. Algumas configurações com estados oscilantes de ordem 2 (logo, não convergentes) são eliminados com $I = 1$. Por outro lado, $I = i$ é pequeno o suficiente para não perturbar de forma muito forte a dinâmica de mudança de estados. Isto é mostrado nas figuras 5.15 e 5.16, onde vemos que a estrutura oscilante (circulo vermelho) que aparece para $I = 0$ some quando $I = 1$.

Como agora as matrizes que convergem para $i = 0$, podem não convergir para $i \neq 0$, não podemos mais analisar apenas as matrizes que convergem quando $i = 0$, ou seja, quando formos analisar os parâmetros finais para $i = 1$, utilizaremos apenas as matrizes que convergem para $i = 1$, se analisarmos os parâmetros para $i = 2$, utilizaremos apenas as matrizes que convergem para $i = 2$ e assim por diante. Em outros capítulos fizemos uma comparação do “ensemble” de matrizes que convergem com o “ensemble” de todas as matrizes para podermos ter certeza de que o conjunto que analisaríamos era realmente homogêneo. Faremos isso novamente aqui, porém faremos essa comparação para cada valor de i .

Encontramos na figura 5.17 as curvas da quantidade de matrizes em função de p_+ inicial. Na legenda ao lado da figura está a convenção de cores utilizada para identificar

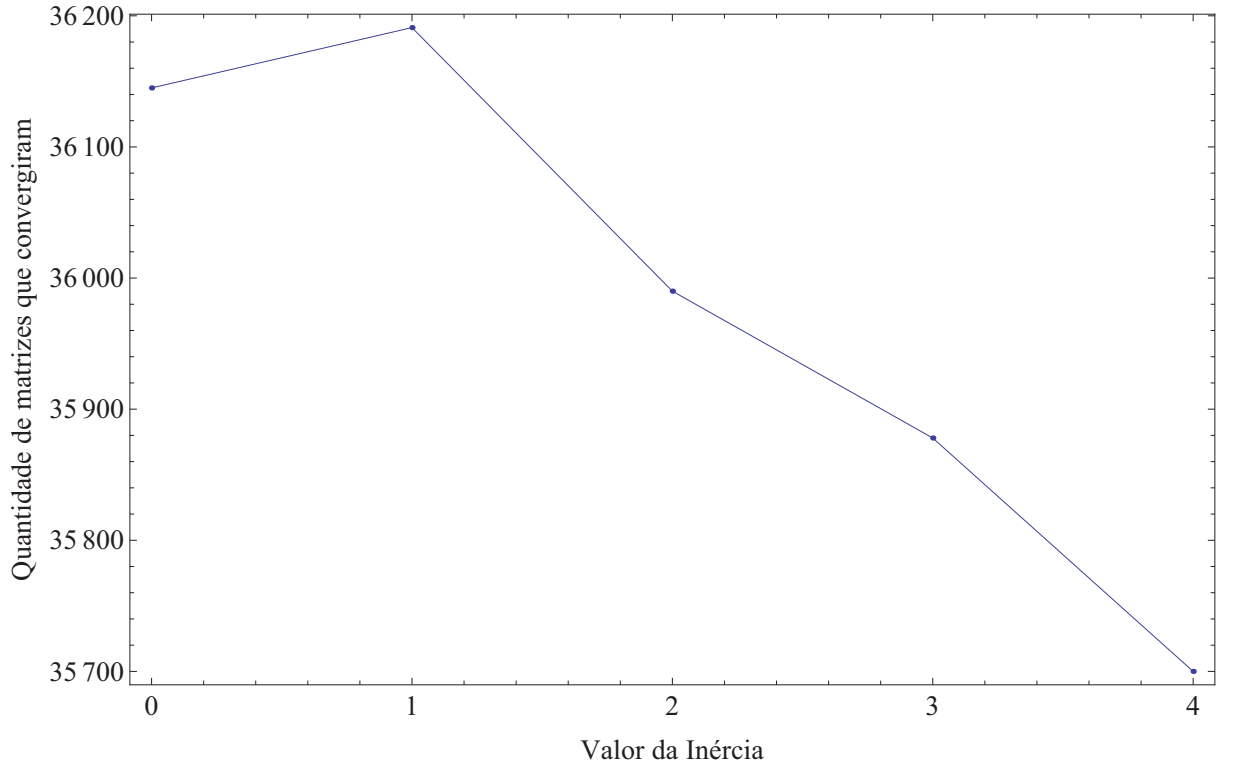


Figura 5.14: Quantidade de matrizes que convergiram versus o valor da inércia.

cada curva. Já na figura 5.18 podemos ver as curvas da quantidade de matrizes em função de c_+ inicial. A partir dessas figura notamos que a distribuição das matrizes nos parâmetros p_+ e c_+ iniciais é homogênea para todos os valores de i analisados e que as curvas são muito similares e próximas umas das outras.

Também podemos ver como p_+ inicial médio varia em função de c_+ inicial (figura 5.19) ou como c_+ inicial médio varia em função de p_+ (figura 5.20). Nessas figuras vemos que as formas das curvas são muito parecidas, havendo pouca diferença entre diferentes valores de inércia. Além dessas curvas serem similares entre si, também são com as curvas das figuras 2.9 e 2.10. Portanto as conclusões sobre estas figuras são as mesmas discutidas no capítulo 2: matrizes com p_+ inicial maior tem na média c_+ inicial maior, matrizes com c_+ inicial maior, tem na média p_+ inicial maior, o valores de p_+ e c_+ iniciais médios flutuam em torno do valor médio desses parâmetros, com relativa pequena dispersão.

Mostramos na figura 5.21 as curvas da população final média do estado +1 versus a população inicial referentes aos valores de i da figura 5.13. Observando essa figura vemos que o crescimento linear de p_+ final médio em função de p_+ inicial que foi encontrado para outras distribuições de inércia é mantido aqui. Também podemos ver o mesmo decréscimo para o ângulo de inclinação de retas fitadas a partir dessas curvas, que encontramos no capítulo 4 para o caso de todo o AC ter um valor constante de $I > 0$. Porém, como esperado, este decréscimo é menor, uma vez que $I \neq 0$ apenas para uma região limitada do AC. Um aspecto importante é que a grande similaridade vista nas diferentes curvas

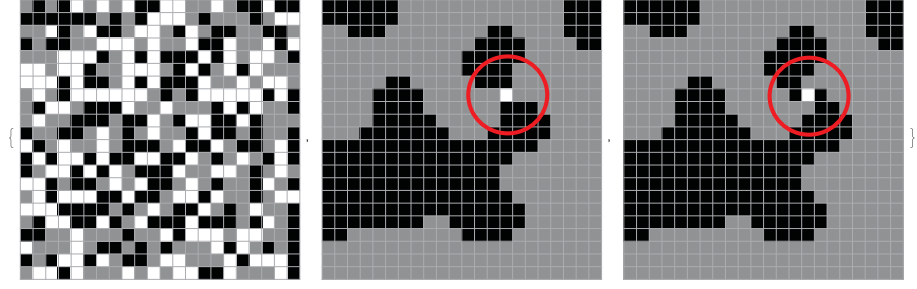


Figura 5.15: Configuração inicial e as duas configurações estacionárias de um AC típico com $I = 0$.

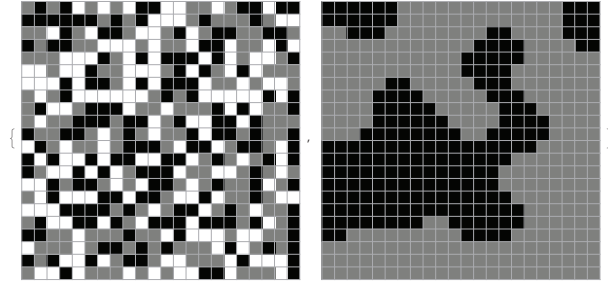


Figura 5.16: Configuração inicial e configuração estacionária de um AC típico com $I = 1$.

em 5.21 mostra que um “cluster” central de elementos com maior inércia não muda o comportamento estatístico global do sistema, apenas diminui o valor médio da população final. As figuras 5.22 e 5.23 mostram o valor da inclinação e do coeficiente linear calculado a partir das retas fitadas para as curvas da figura 5.21, quantificando a descrição acima. O coeficiente linear aumenta com a inércia, mas isso não significa que o valor médio da população final aumenta, se olharmos a figura 5.21 vemos que o valor médio da população final diminui quando aumentamos a inércia.

O gráfico das curvas da clusterização final média do estado +1 versus a população inicial é mostrado na figura 5.24. O ângulo de inclinação das retas fitadas a partir dessas curvas é praticamente o mesmo, varia apenas $0,014^\circ$ (figura 5.25). O coeficiente linear decresce com o aumento da inércia, mostrado na figura 5.26. Então como o valor médio de c_+ final muda mas não mudando $\frac{d[c_+]_{\text{final}}}{d[p_+]_{\text{inicial}}}$, então concluímos que o “cluster” central de elementos com inércia maior apenas diminui o valor da clusterização final, não mudando qualitativamente como a população inicial dita a clusterização final.

Na figura 5.27 mostramos as curvas da população final média pela clusterização inicial para valores de i do bloco central igual a $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Podemos ver que o formato de todas as curvas é muito parecido. Se fitarmos uma reta do tipo $y = ax + b$, apesar da forte flutuação, podemos ver que o ângulo de inclinação das retas é praticamente constante (mostrado na figura 5.28), porém o valor do coeficiente linear diminui quando aumentamos a inércia (figura 5.29), indicando que o valor médio de p_+ final diminui com a inércia (resultado já obtido anteriormente e agora novamente confirmado). Concluímos então que o bloco central de elementos com maior inércia não altera a forma das curvas,

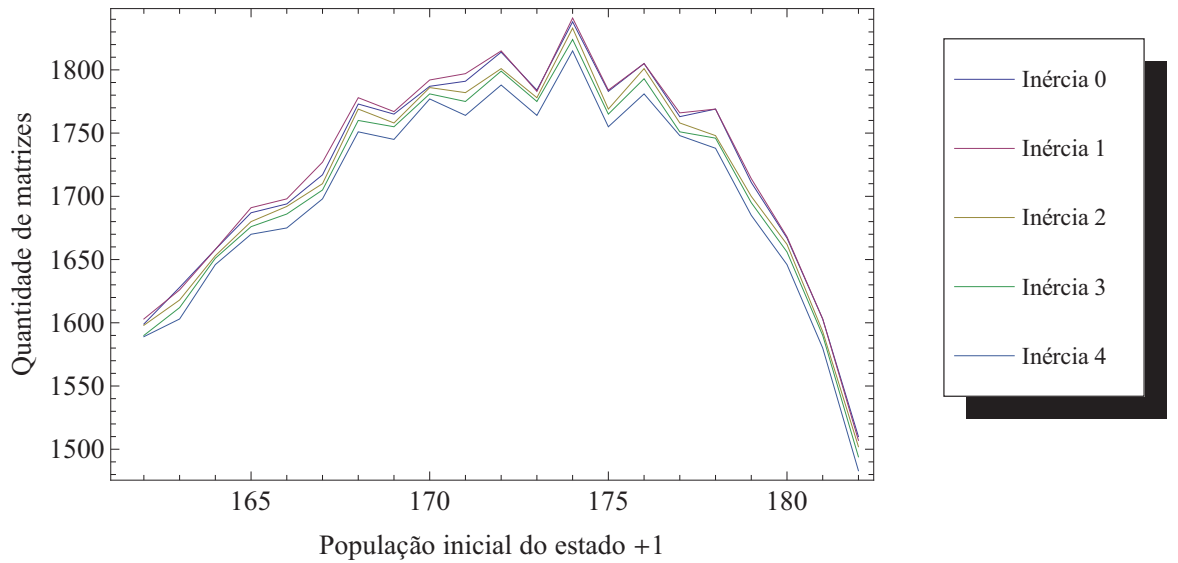


Figura 5.17: Quantidade de matrizes que convergiram versus o população inicial do estado +1.

apenas diminui o valor da clusterização final dos autômatos.

As curvas da clusterização final média pela clusterização inicial para todos os valores de i analisados são mostradas na figura 5.30, e como nas outras figuras vemos que a forma das curvas dos diferentes valores de inércia é praticamente igual, tanto que se olharmos a figura 5.31 podemos ver que a variação na inclinação das retas fitadas a partir dessas curvas é muito pequena. Portanto c_+ final média em função de c_+ inicial tem o mesmo comportamento quando variamos o valor da inércia do bloco central, porém, o valor da clusterização final é menor para valores de inércia maiores, novamente confirmando um resultado encontrado anteriormente. Apesar do valor do coeficiente linear aumentar com a inércia, que pode ser visto na figura 5.32, isso não significa que a clusterização final média aumenta, pois podemos ver claramente na figura 5.30 que a clusterização final média diminui com a inércia.

Na figura 5.33, que representa o valor médio do tempo de convergência para diferentes valores de inércia, podemos ver que o número de iterações médio que um autômato leva para convergir varia muito pouco quando aumentamos o valor da inércia do cluster central, mas a tendência do tempo de convergência médio é ter uma pequena queda em seu valor quando aumentamos a inércia, da mesma forma que acontece para a configuração de inércia onde todos os elementos tem o mesmo valor para I .

Na figura 5.34 podemos ver como um AC típico evolui para cada valor de inércia. Cada linha é referente a um valor de inércia ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) e cada coluna representa uma nova geração. Notamos que aumentando a inércia do bloco central alteramos apenas o comportamento dos elementos do centro do AC, enquanto o resto dos elementos evoluem praticamente da mesma forma, por isso temos um tempo de convergência parecido para todos os valores de inércia. Como temos apenas um bloco central de elementos que mudam

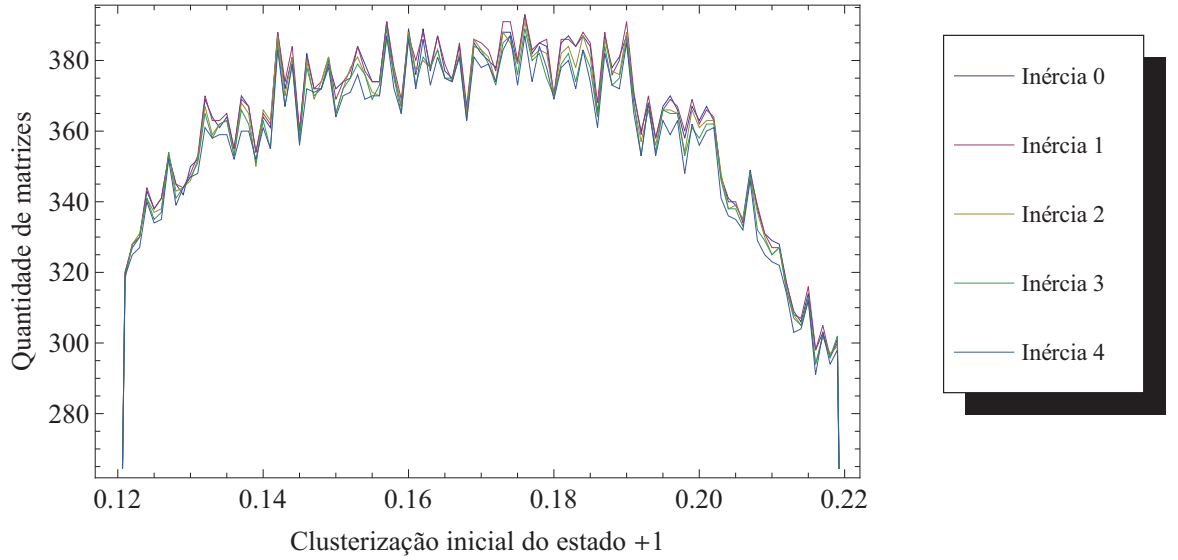


Figura 5.18: Quantidade de matrizes que convergiram versus o clusterização inicial do estado +1.

menos de estado, na média, os parâmetros finais não serão muito alterados comparando com o caso $I = 0$ para todo o AC. Então podemos dizer que a dinâmica de evolução fora do bloco de inércia não nula é pouco afetada, mudando apenas dentro e nas bordas desse bloco.

A partir de todos os resultados obtidos anteriormente podemos concluir que nenhuma das configurações de inércia por blocos homogêneos altera a linearidade da população final média e da clusterização final média do estado +1 quando graficadas contra a população inicial. Também temos que o decréscimo na população final média quando aumentamos a clusterização inicial é mantido em todas as configurações de inércia, porém o decréscimo na clusterização final média quando aumentamos a clusterização inicial só é mantido na configuração de inércia do tipo 2, pois na do tipo 1, a clusterização final média é maior para valores de clusterização inicial maiores. Também temos que, na configuração de inércia do tipo 2, a forma de todas as curvas (figuras 5.21, 5.24, 5.27 e 5.30) é a mesma para os diferentes valores de inércia. Além disso, o aumento da inércia diminui o valor da população final e da clusterização final. Obviamente que este fato pode mudar se aumentarmos o tamanho do bloco central. Tal análise é um bom tema para trabalhos futuros.

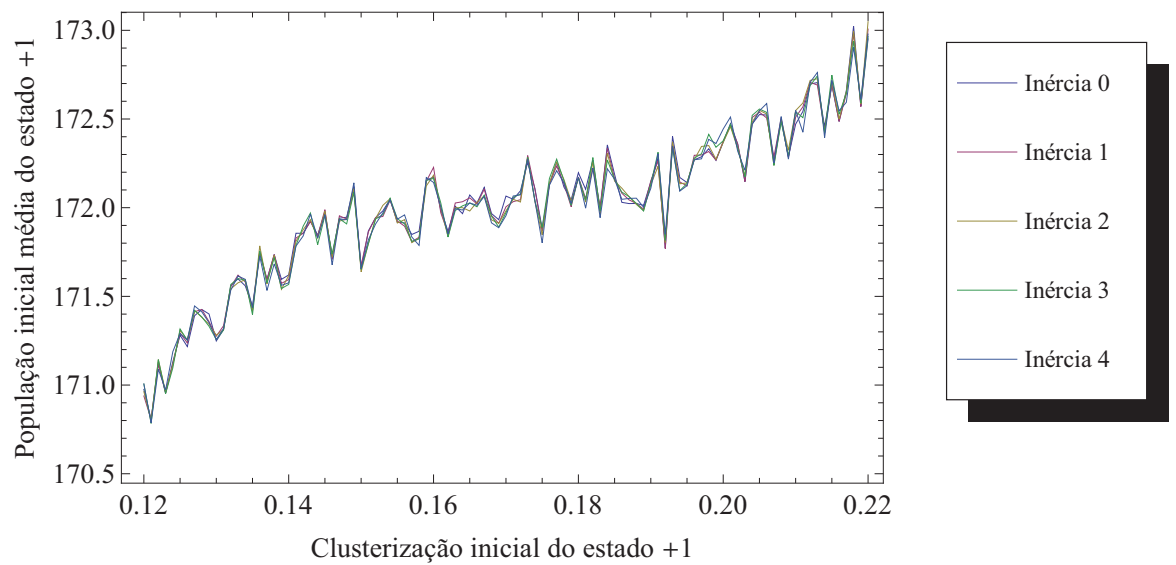


Figura 5.19: População inicial média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.

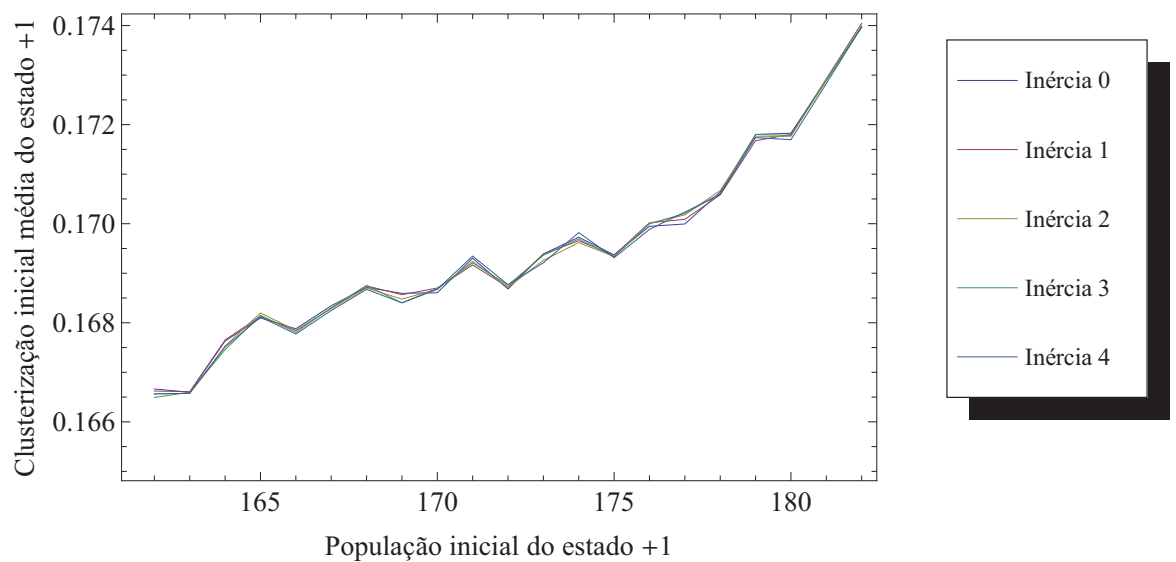


Figura 5.20: Clusterização inicial média do estado +1 versus população inicial do estado +1.

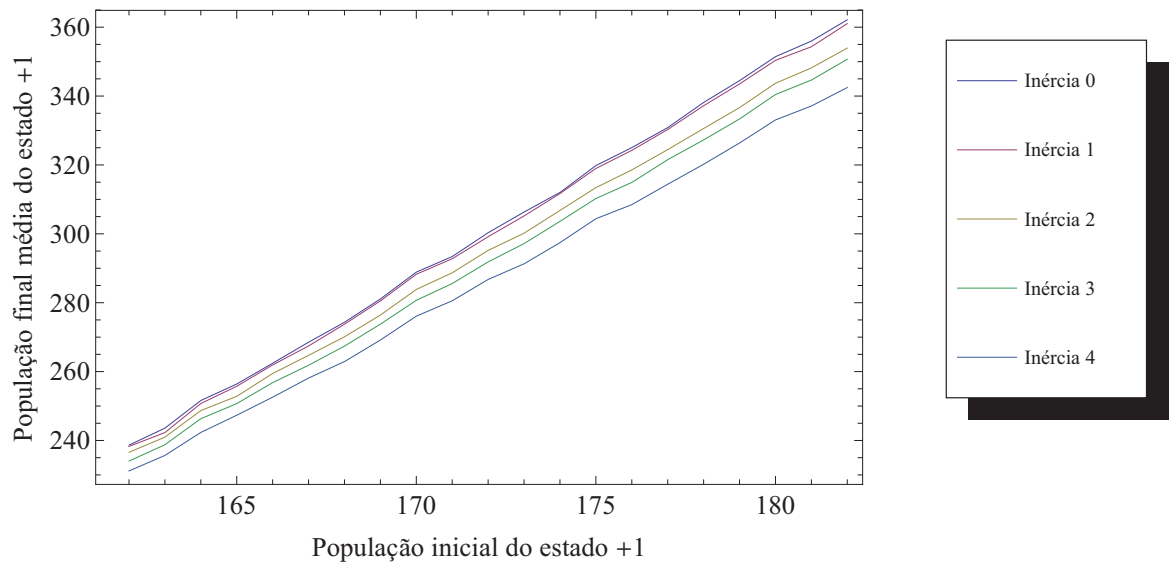


Figura 5.21: População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

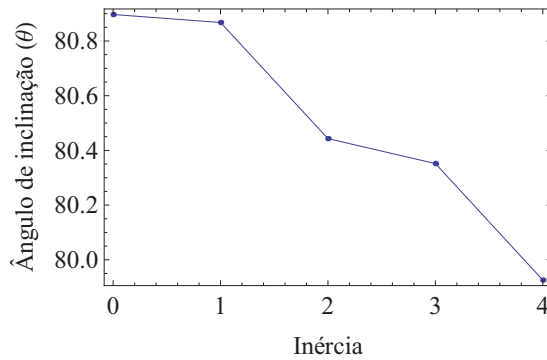


Figura 5.22: Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

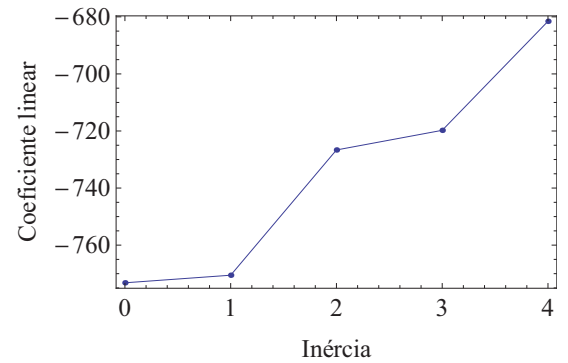


Figura 5.23: Coeficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

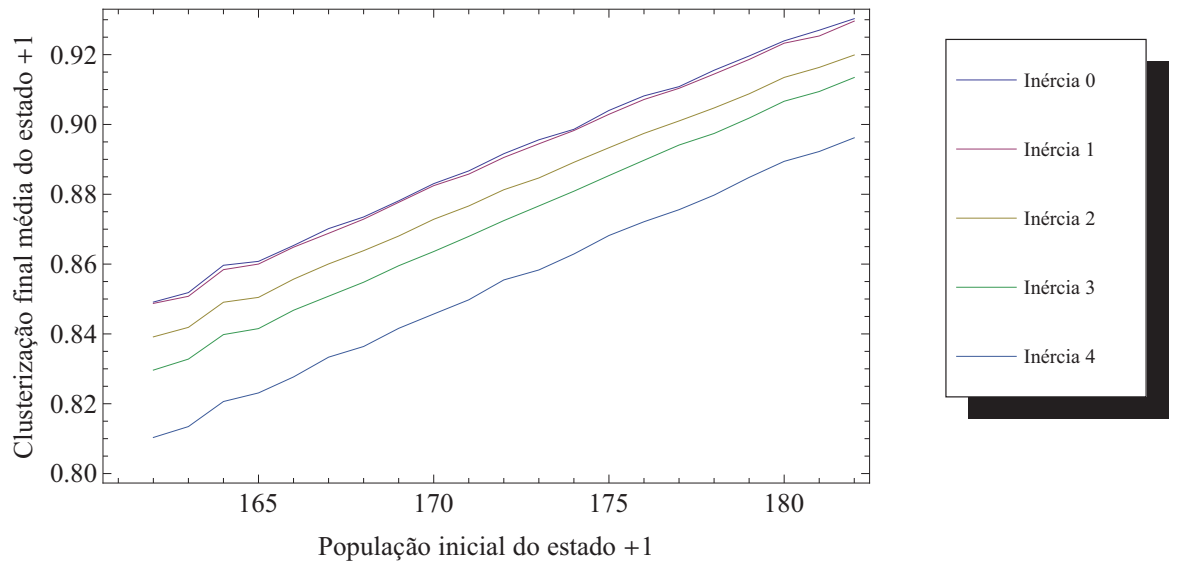


Figura 5.24: Clusterização final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

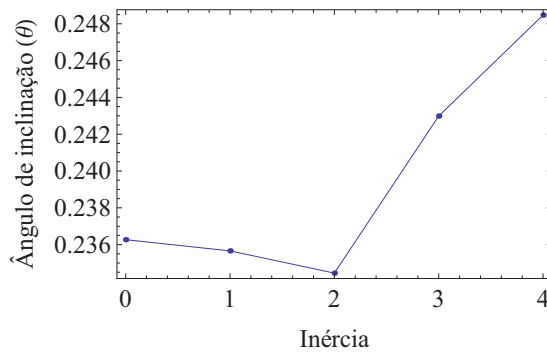


Figura 5.25: Ângulo de inclinação da reta da clusterização final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

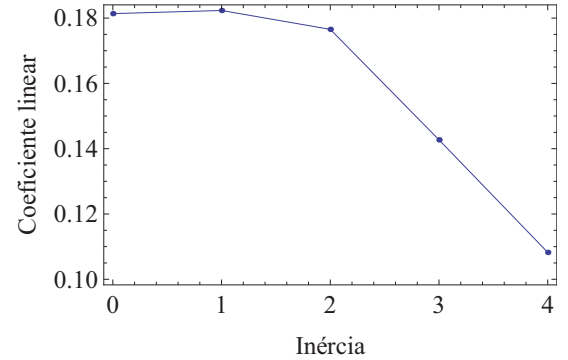


Figura 5.26: Coeficiente linear da reta da clusterização final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

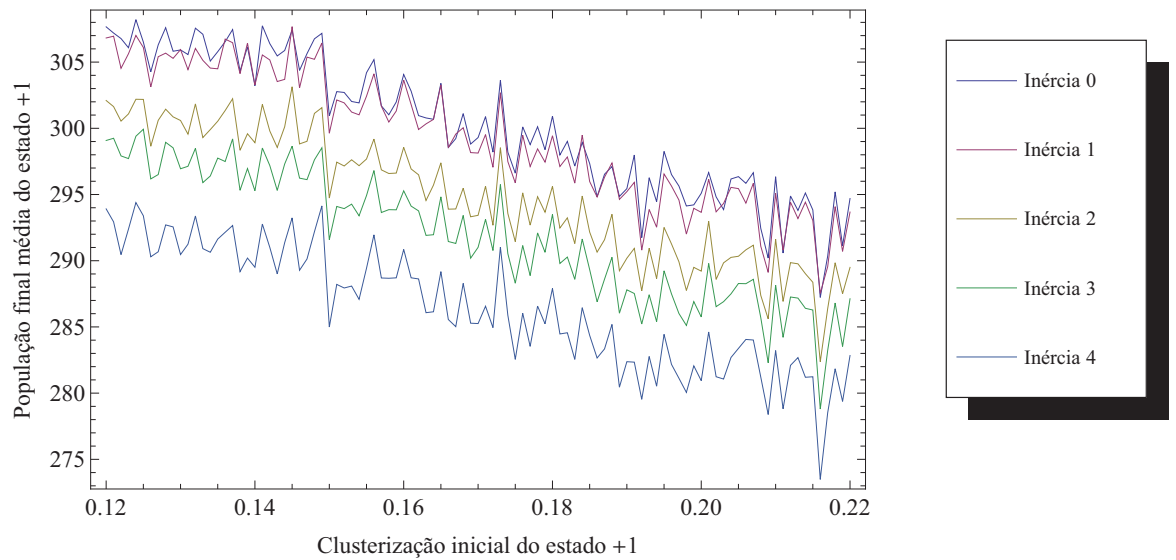


Figura 5.27: População final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

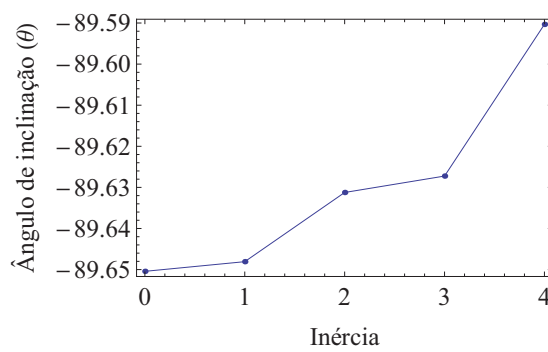


Figura 5.28: Ângulo de inclinação da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

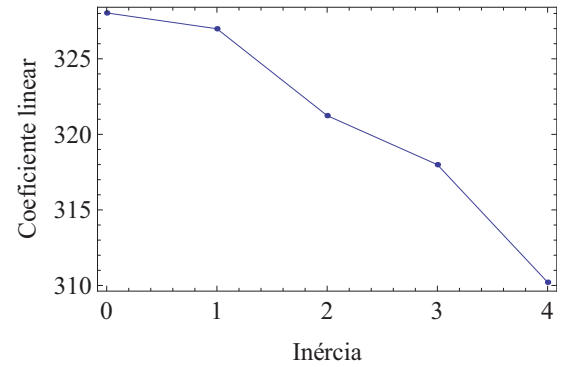


Figura 5.29: Coeficiente linear da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

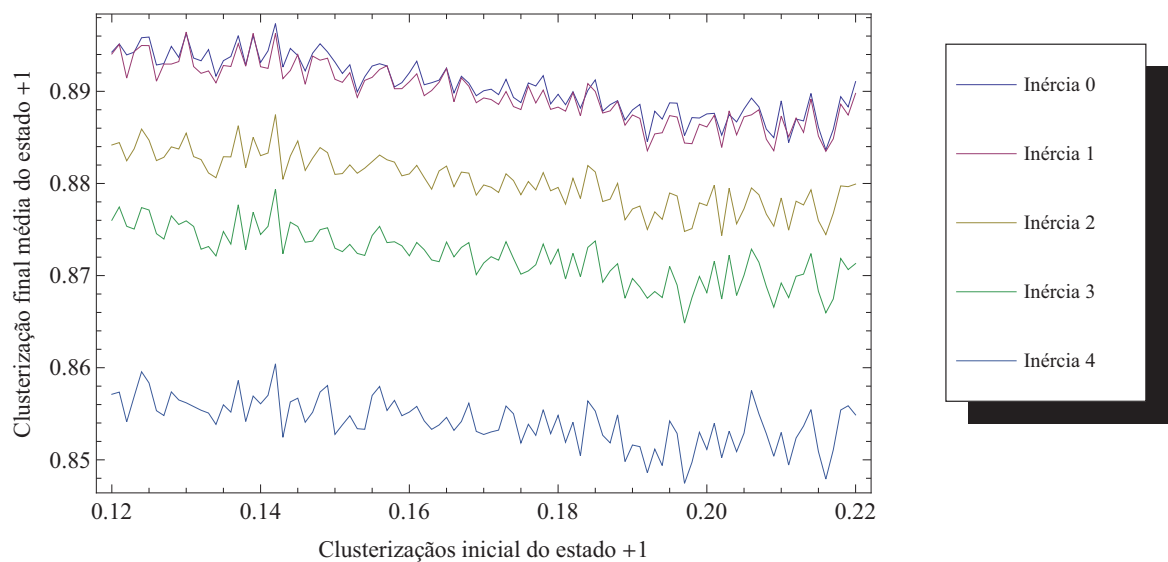


Figura 5.30: População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

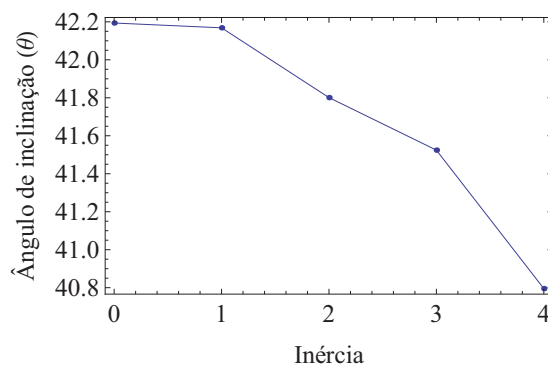


Figura 5.31: Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

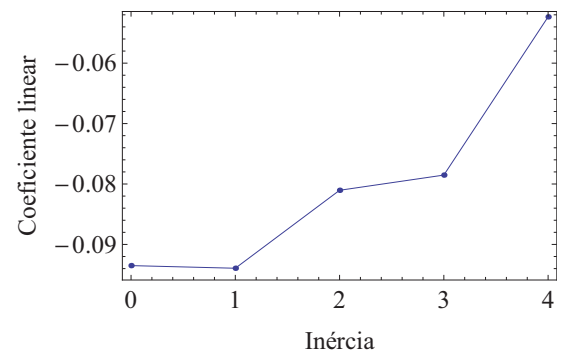


Figura 5.32: Coeficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

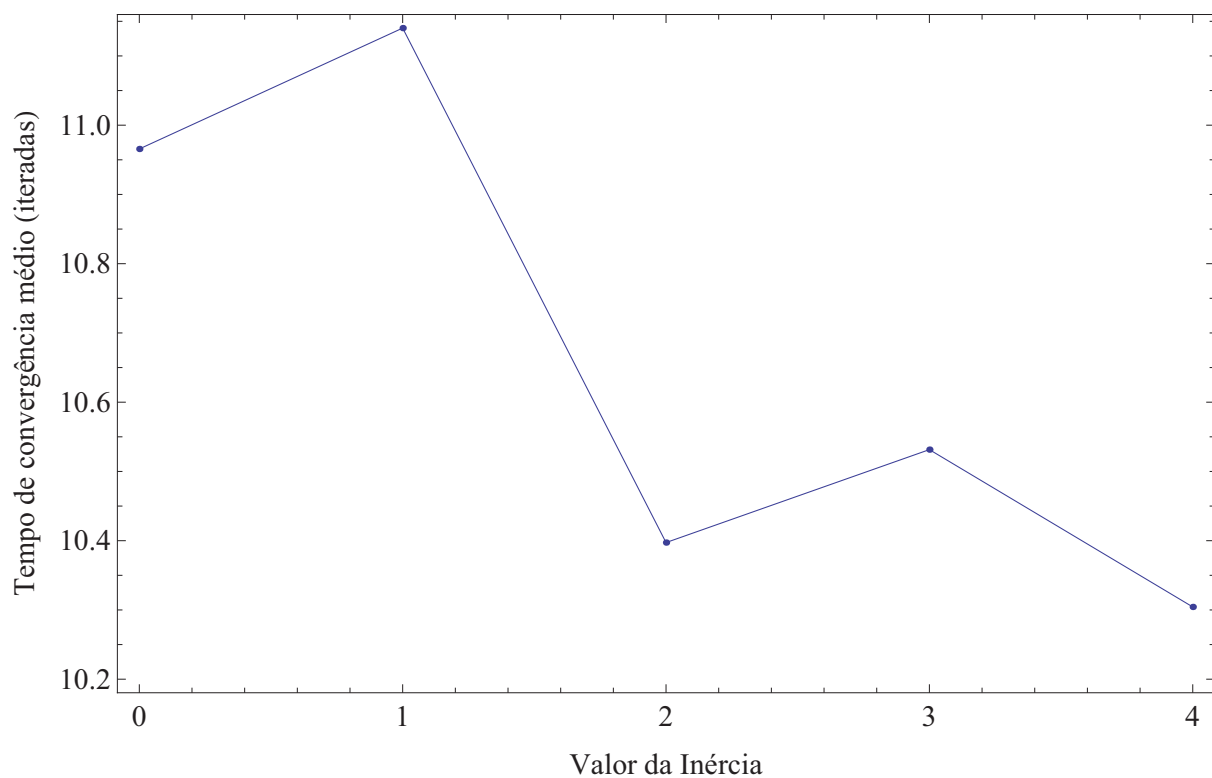


Figura 5.33: Tempo de convergência médio versus valor da inércia.



Figura 5.34: Evolução de um autômato com clusterização inicial do estado +1 igual a 0.167878, população inicial do estado +1 igual a 172 e tempo de convergência igual a 9 iteradas quando $I = 0$.

Capítulo 6

Inércia não-nula só para o estado zero

Neste capítulo apresentaremos os resultados para o nosso AC quando utilizamos uma inércia diferenciada para os elementos que estão inicialmente no estado zero. Como o estado zero não participa da competição dinâmica (estado passivo), é quase sempre absorvido pelos outros estados quando $I = 0$. Então é interessante aumentar apenas sua inércia e deixar os outros dois estados com inércia igual a zero. Os valores utilizados para o estados zero serão $I = 1, 3, 6, 8$. Em nossas análises, comparamos os resultados para esses valores de I com aqueles para $I = 0$. Novamente discutiremos apenas as matrizes que convergem para a configuração estacionária.

6.1 Comparações entre diferentes valores de inércia

Da mesma forma que no capítulo anterior, o número de matrizes que converge diminui com a inércia, o que é mostrado na figura 6.1, onde graficamos a quantidade de matrizes que convergiram para cada valor de inércia. Como analisamos apenas as matrizes que convergiram, precisamos de um conjunto relativamente homogêneo de matrizes para fazermos médias. A seguir apresentamos a distribuição de parâmetros para as matrizes que convergiram.

Na figura 6.2 podemos ver as curvas da quantidade de matrizes versus o valor da população inicial do estado +1 para os valores de inércia iguais a $I = 0, 1, 3, 6, 8$. Já na figura 6.3 temos as curvas da quantidade de matrizes versus a clusterização inicial do estado +1 para esses mesmos valores de inércia. Observando essas figuras podemos ver que o conjunto de matrizes que convergiram para cada valor de inércia é relativamente homogêneo tanto na população inicial quanto na clusterização inicial. Apesar da homogeneidade, a quantidade de matrizes é baixa para o caso de inércia igual a 6 e 8. Isso causa um baixo número de matrizes com mesma população ou com mesma clusterização. Assim as médias que faremos nestes casos de $I = 6$ e 8 devem ser consideradas com um pouco mais de cautela.

As curvas da população inicial média pela clusterização inicial e da clusterização inicial

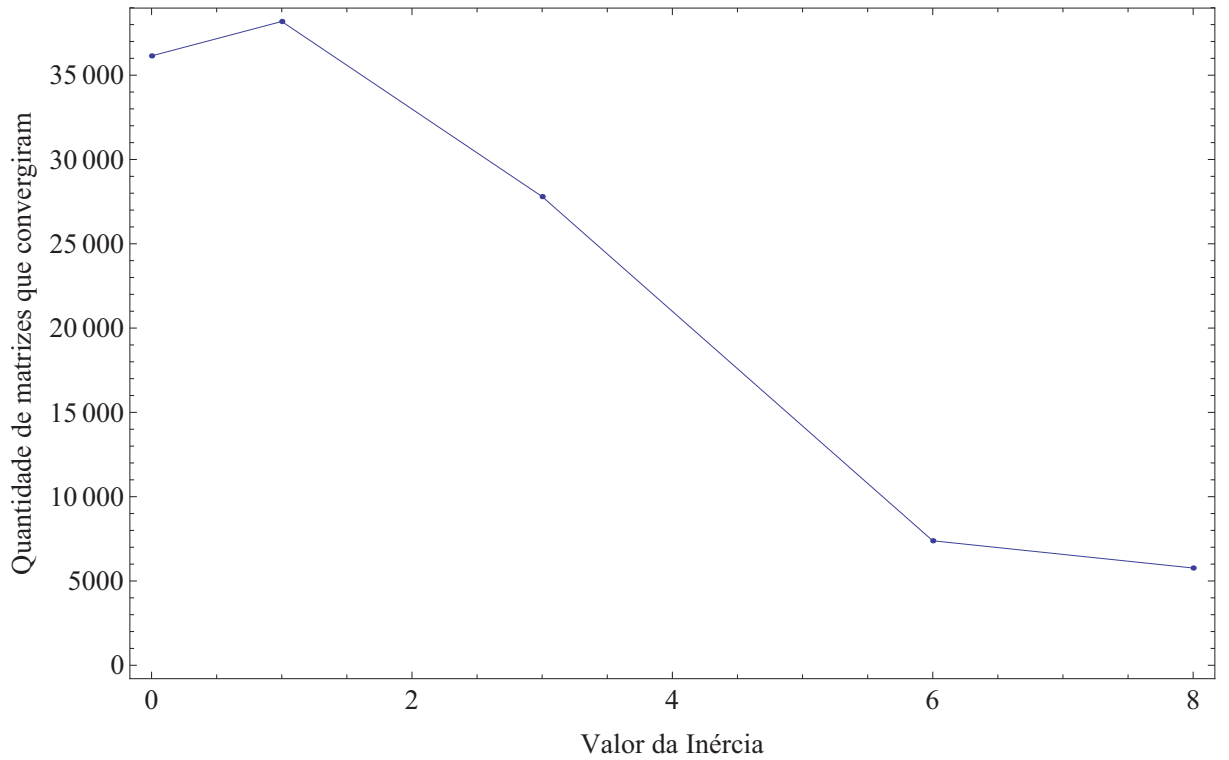


Figura 6.1: Quantidade de matrizes que convergiram versus o valor da inércia.

média pela população inicial para cada valor de inércia são apresentadas nas figuras 6.4 e 6.5. Podemos notar que as curvas para inércia igual a 0, 1 e 3 flutuam pouco em torno da média, porém para inércia igual a 6 e 8 essas curvas têm flutuações bem maiores. Como já mencionado, isto é devido a pouca quantidade de matrizes com mesma população inicial ou com mesma clusterização. Entretanto, mesmo para $I = 6$ e 8 podemos observar um comportamento característico que segue os outros casos. Logo, podemos falar em termos de médias, apenas lembrando que a margem de erro para inércia igual a 6 e 8 é maior. A população inicial média e a clusterização inicial média das matrizes observadas aqui seguem a mesma tendência do visto em outros capítulos, ou seja, matrizes com clusterização inicial alta tem população inicial alta e matrizes com clusterização inicial alta tem população inicial alta.

As curvas da figura 6.6 mostram a população final média pela população inicial do estado +1 para inércia igual a $I = 0, 1, 3, 6, 8$. Podemos ver que a forma linear ($y = ax + b$) das curvas é mantida. Nas figuras 6.7 e 6.8 temos o ângulo de inclinação e o coeficiente linear fitados a partir das curvas da figura 6.6. Note que a inclinação das retas diminui e que o coeficiente linear aumenta, um resultado já obtido no capítulo 4. A diferença é que para uma inércia igual para todos os elementos a inclinação chega a 45° (caso $I = 8$) e aqui para inércia diferenciada para o estado zero, a inclinação é de no mínimo 72° . O coeficiente linear também cresce, sendo esse comportamento o mesmo visto para inércia igual para todos os elementos, mas o valor máximo desse coeficiente é menor para o presente caso de inércia diferenciada. Colocando um valor de inércia maior apenas para os elementos no

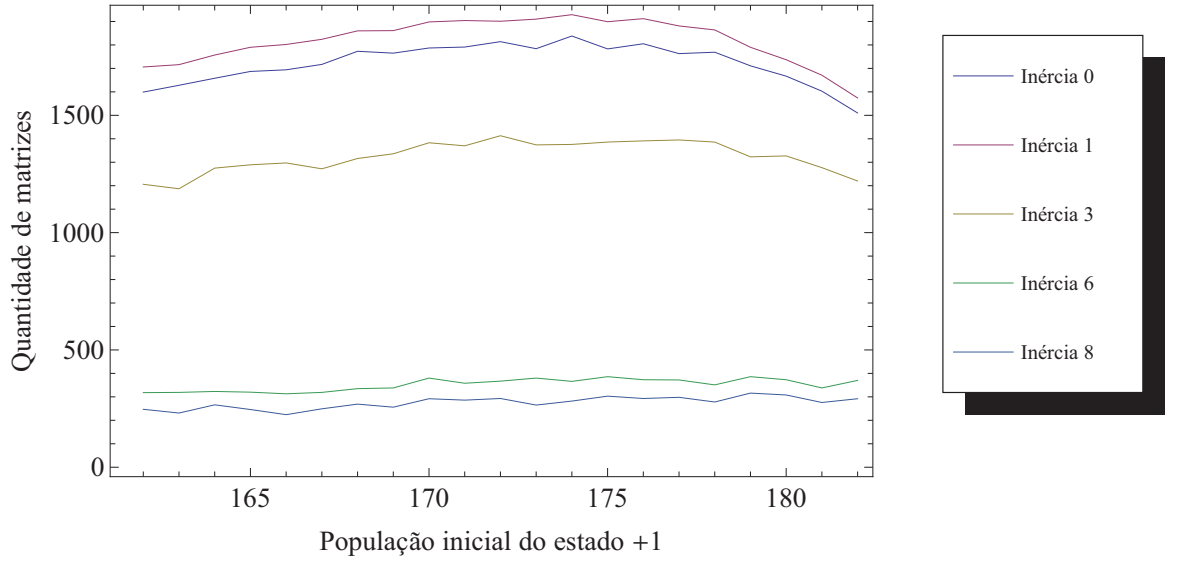


Figura 6.2: Quantidade de matrizes que convergiram versus o população inicial do estado +1.

estado zero observamos que a população final média cresce linearmente com a população inicial, independente do valor da inércia, o valor da inclinação das retas fitadas diminui e o coeficiente linear aumenta, o que remete ao comportamento do caso em que a inércia é igual para todos os elementos.

As curvas da clusterização inicial média pela população inicial para os valores de inércia podem ser vistas na figura 6.9. Nas figuras 6.10 e 6.11 apresentamos respectivamente o ângulo de inclinação e o coeficiente linear de retas fitadas a partir das curvas da figura 6.9. As curvas para inércia igual a 0 e 1 são praticamente iguais e o valor da inclinação é quase o mesmo. Para $i = 3$, a inclinação da reta fitada é aproximadamente igual às curvas de inércia menor, mas o coeficiente linear é menor. Para valores de inércia maior os coeficiente já assumem valores distintos. Então podemos dizer que para inércias baixas p_+ inicial influencia muito mais c_+ final do que quando a inércia é mais alta.

Na figura 6.12 apresentamos as curvas da população final média pela clusterização inicial. As figuras 6.13 e 6.14 mostram os valores do ângulo de inclinação e do coeficiente linear das retas fitadas a partir da figura 6.12. Para essa configuração de inércia continuamos a ter uma inversão no ângulo de inclinação quando temos inércia maior que 4. Já o coeficiente linear sempre decresce. Portanto inércia diferenciada para o estado zero não altera muito o comportamento médio de p_+ final médio em função de c_+ inicial.

Na figura 6.15 temos as curvas da clusterização final média pela clusterização inicial para inércia igual a $I = 0, 1, 3, 6, 8$. Nela podemos notar que para inércia igual a 0 e 1, o ângulo de inclinação das retas fitadas é negativo e se aumentarmos o valor da inércia, o ângulo passa a ser positivo, ocorrendo uma inversão na inclinação das retas. O coeficiente linear também decresce. Podemos ver esse comportamento do ângulo de inclinação e do coeficiente linear nas figuras 6.16 e 6.17. O que ocorre para população final média versus

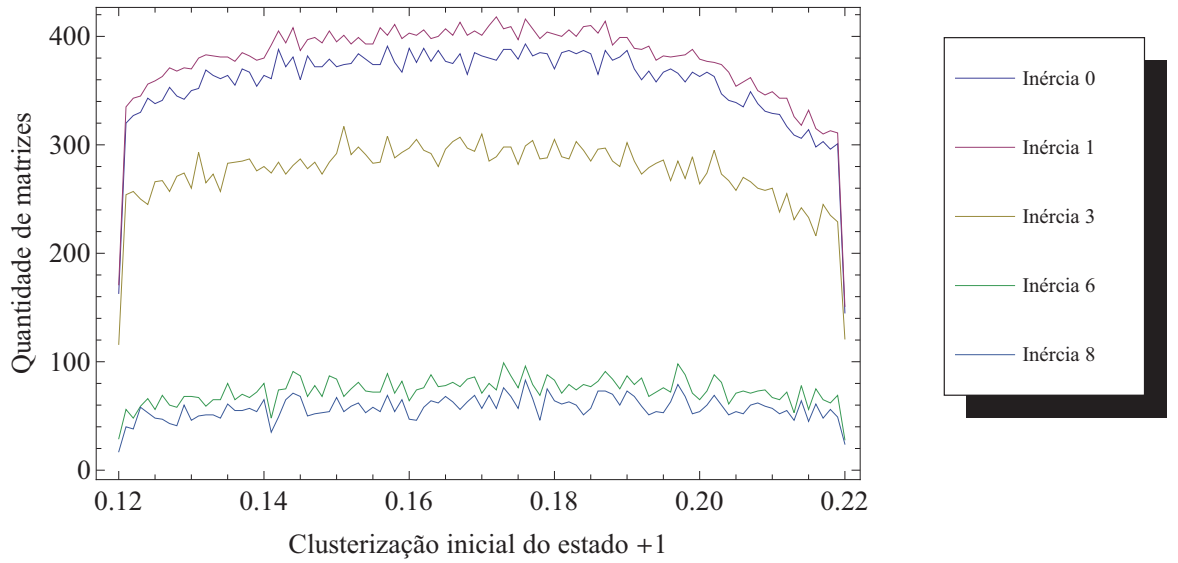


Figura 6.3: Quantidade de matrizes que convergiram versus o clusterização inicial do estado +1.

clusterização inicial no caso de mesma inércia para todos os elementos também ocorre aqui, mas se compararmos com a figura 4.10 vemos que a inércia diferenciada não baixa tanto a clusterização quanto o caso de inércia igual para todas as células.

O tempo de convergência médio varia para diferentes valores de inércia e isso pode ser visto na figura 6.18. Quando tínhamos inércia igual para todos os elementos, o tempo de convergência decaía de seu máximo até zero (figura 4.13), porém para inércia diferenciada para o estado zero o tempo de convergência decai de seu máximo até aproximadamente 8,3. Note que a queda do tempo de convergência deveria ser esperado. Com um valor de inércia grande para o estado zero, eles “deixam” de participar da dinâmica, logo com menos elementos atingimos um estado estacionário mais rapidamente.

Na figura 6.19 podemos ver como um autômato evolui quando temos inércia maior apenas para os elementos no estado zero. As colunas de matrizes representam os valores da inércia do estado zero ($I = 0, 1, 3, 6, 8$), e as linhas representam cada geração do AC. Nesta figura observamos que a inércia maior para o estado zero dificulta a formação de “clusters”, pois os elementos que se encontram no estado zero tendem a resistir mais às tentativas de mudança e acabam sobrevivendo até a configuração final, reduzindo um pouco a possibilidade de aglomeração dos outros estados ativos. Mesmo assim, há formação de “clusters”, inclusive quando $I = 8$, pois apenas os elementos no estado zero não mudam, enquanto os outros elementos se juntam formando domínios. É interessante notar que a fronteira formada entre os estados +1 e -1 não é alterada de uma forma significativa quando a inércia aumenta e se a inércia não é muito grande. Apenas ocorre um acúmulo de elementos no estado zero na fronteira para inércias mais baixas, mas a medida que aumentamos o valor da inércia os elementos zero começam a se acumular em todo o AC.

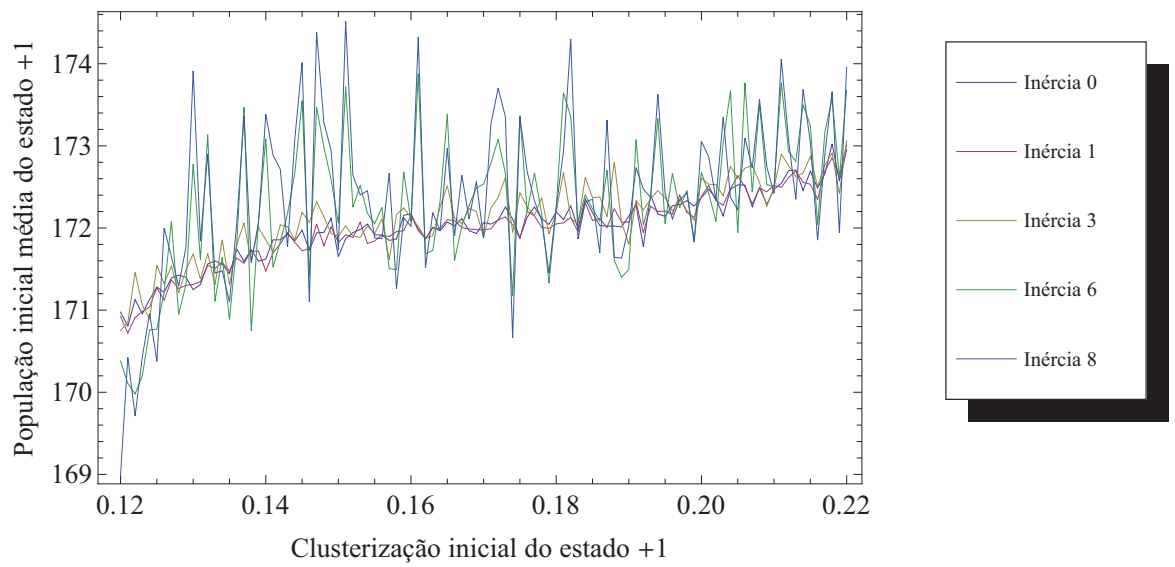


Figura 6.4: População inicial média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1.

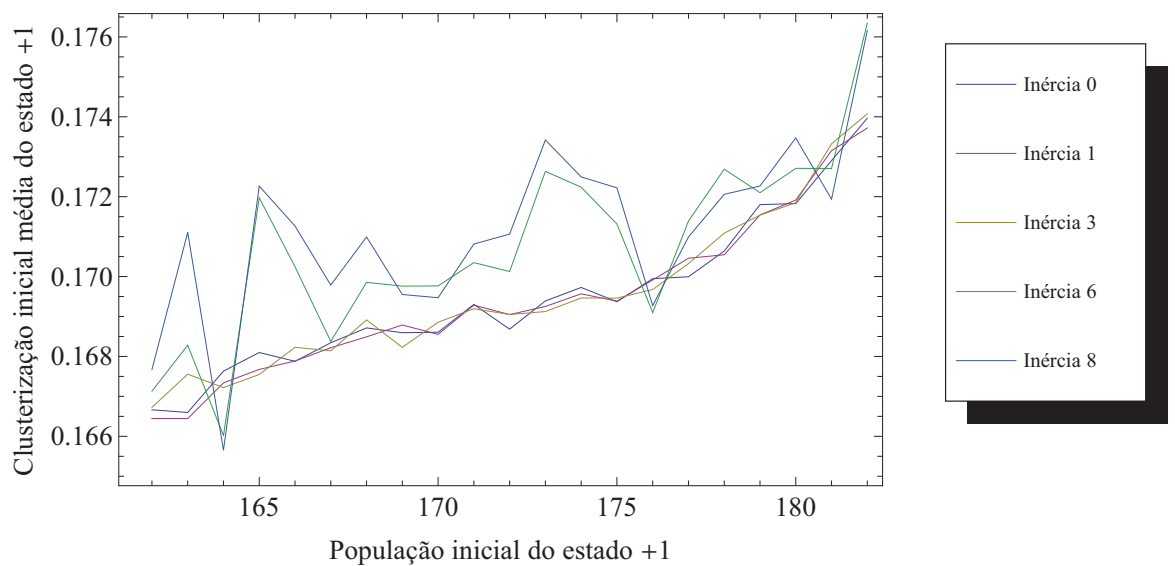


Figura 6.5: Clusterização inicial média do estado +1 versus população inicial do estado +1.

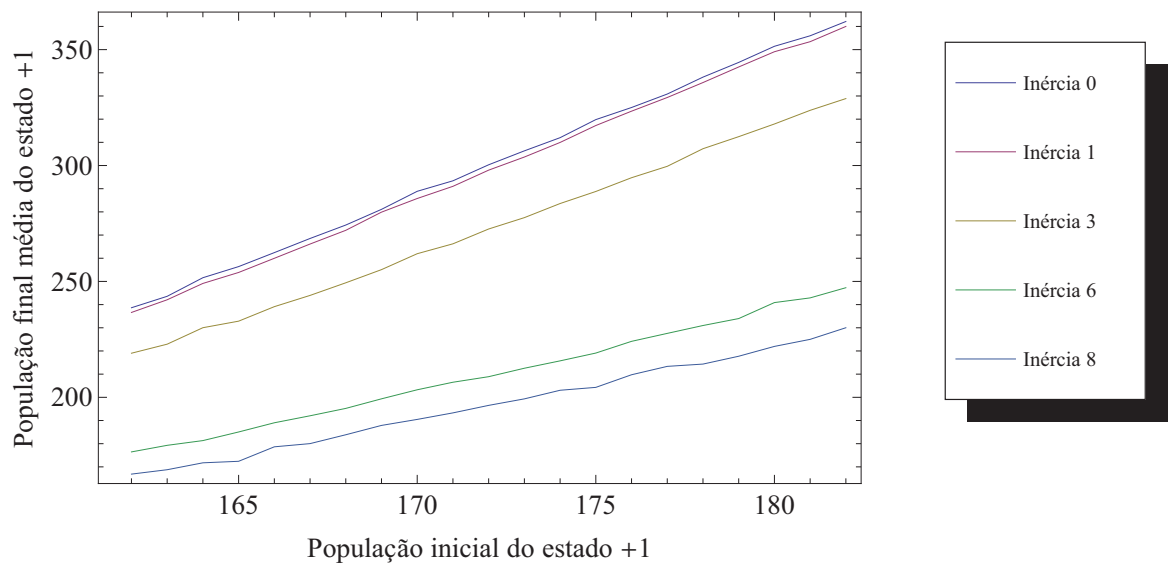


Figura 6.6: População final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

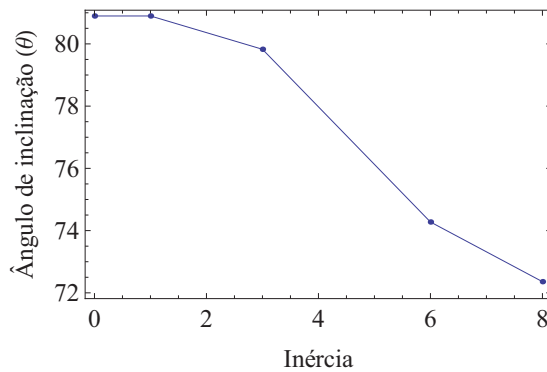


Figura 6.7: Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

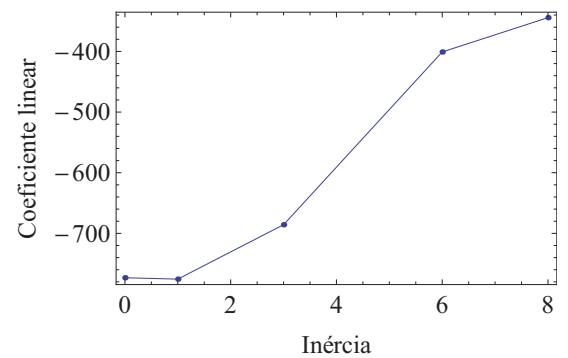


Figura 6.8: Coeficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

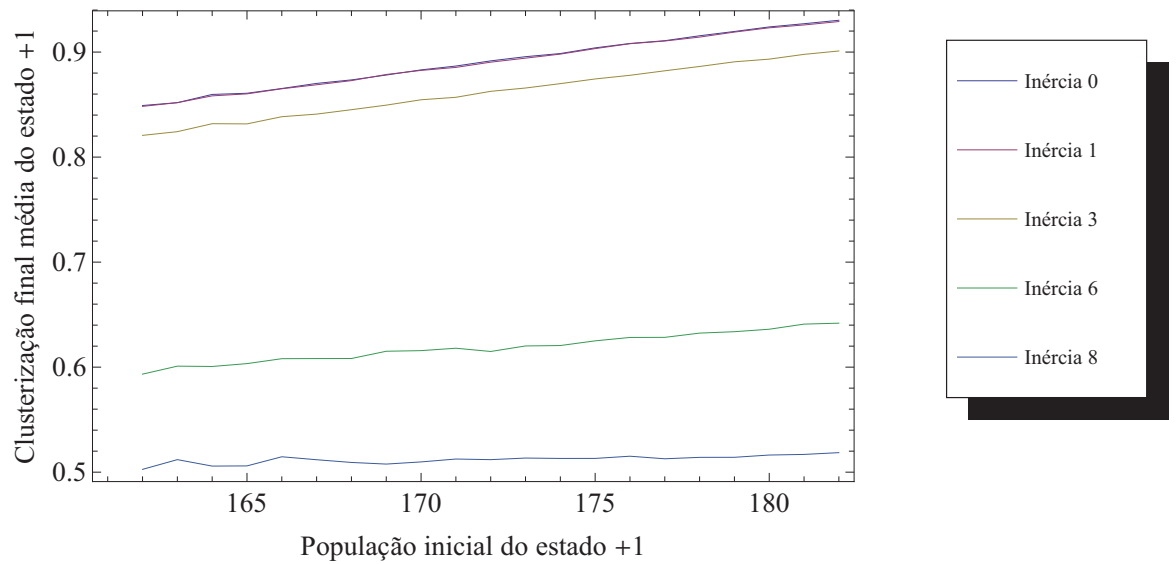


Figura 6.9: Clusterização final média do estado +1 versus população inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

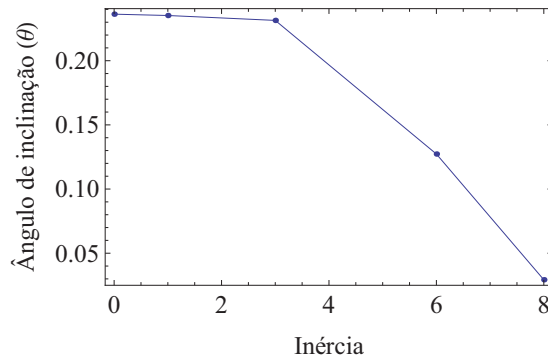


Figura 6.10: Ângulo de inclinação da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

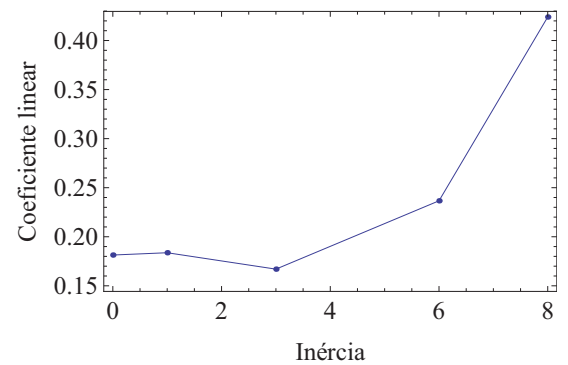


Figura 6.11: Coeficiente linear da reta da população final média pela população inicial para todos os valores de inércia.

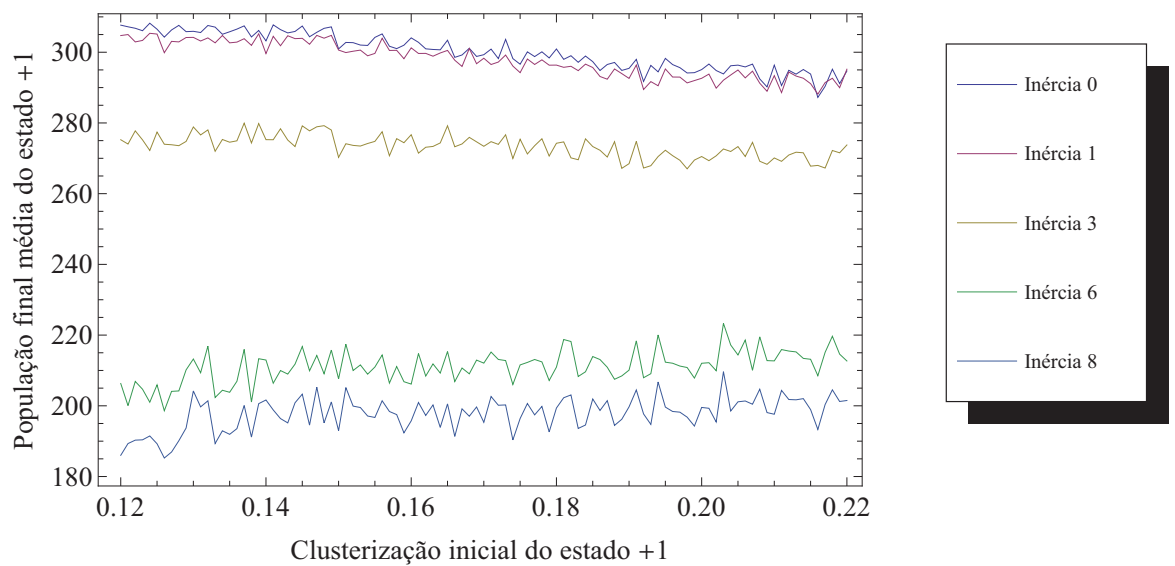


Figura 6.12: População final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

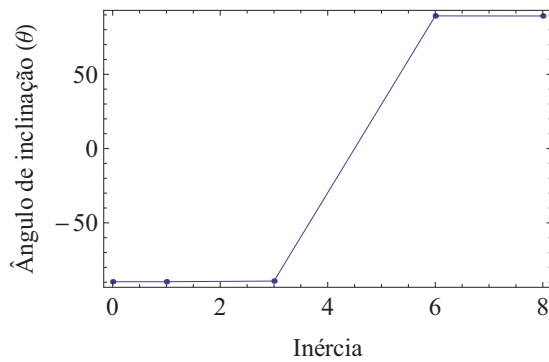


Figura 6.13: Ângulo de inclinação da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

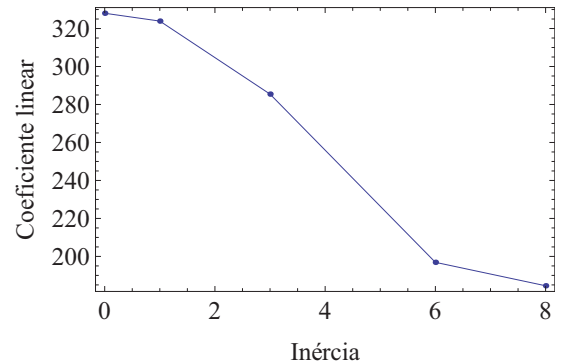


Figura 6.14: Coeficiente linear da reta da população final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

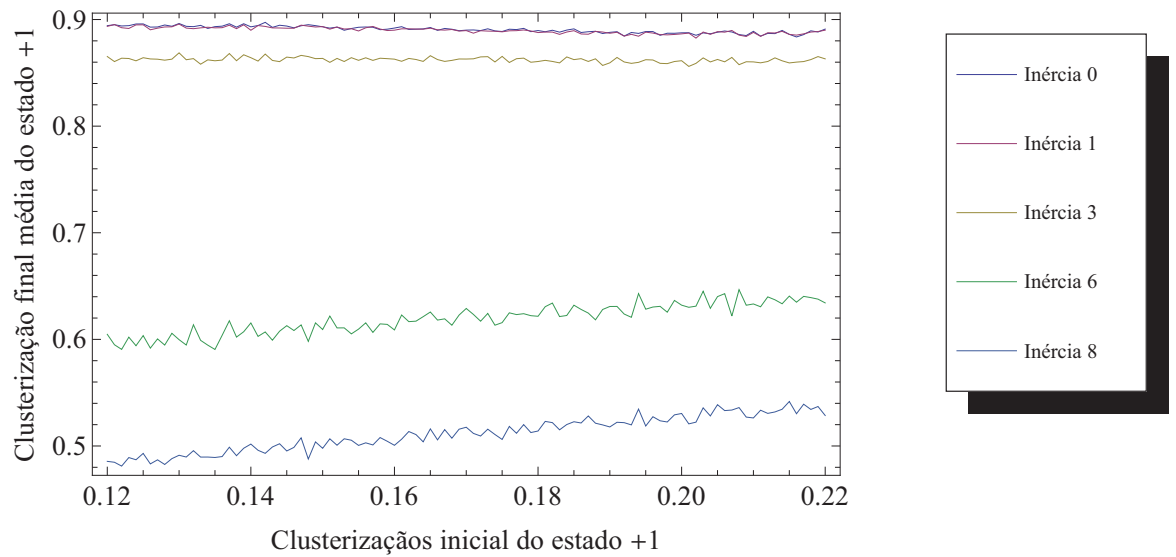


Figura 6.15: Clusterização final média do estado +1 versus clusterização inicial do estado +1 para todos os valores de inércia.

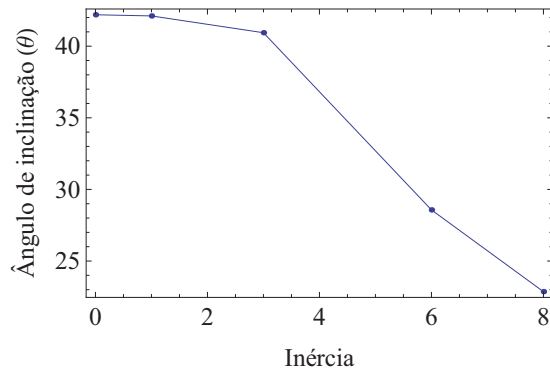


Figura 6.16: Ângulo de inclinação da reta da clusterização final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

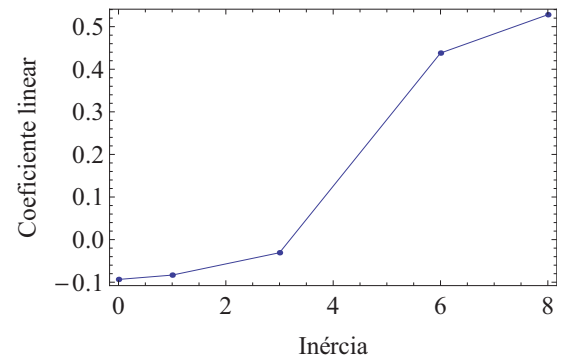


Figura 6.17: Coeficiente linear da reta da clusterização final média pela clusterização inicial para todos os valores de inércia.

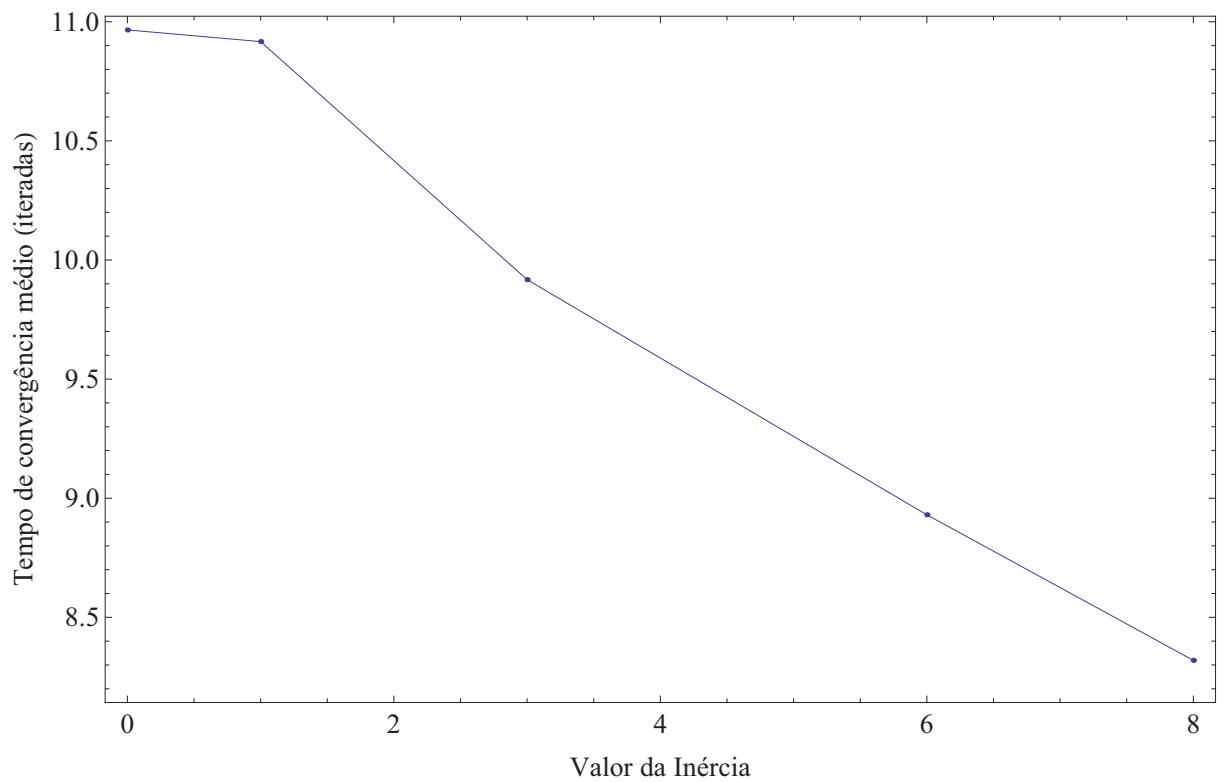


Figura 6.18: Tempo de convergência médio versus valor da inércia.

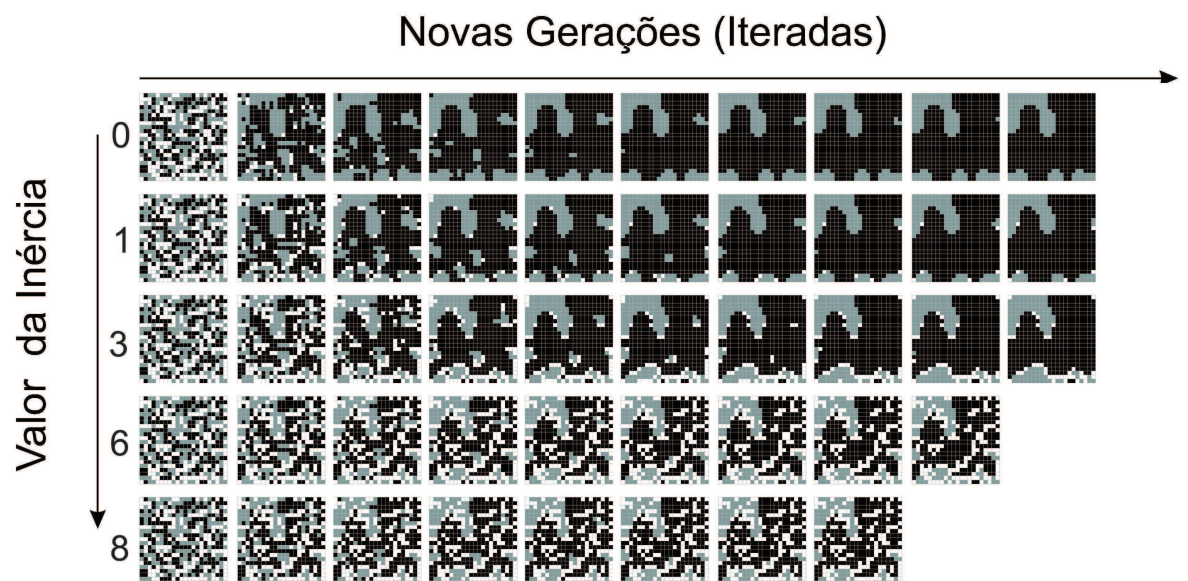


Figura 6.19: Evolução de um autômato com clusterização inicial do estado +1 igual a 0,169574, população inicial do estado +1 igual a 172 e tempo de convergência igual a 9 iteradas quando $I = 0$.

Capítulo 7

Padrões espaciais para as configurações iniciais do AC

Neste capítulo estudaremos nosso AC para matrizes iniciais que possuem padrões espaciais para a distribuição de seus estados, assumindo inércia igual para todos os elementos. Com tais padrões espaciais, podemos por exemplo analisar como os elementos no estado $+1$ ou -1 invadem uma população de elementos no estado 0 , ou como um padrão espacial específico determina a competição entre os estados. Trataremos de dois tipos diferentes de padrões espaciais, nomeados como tipo 1, tipo 2. No padrão tipo 1 trataremos do problema de invasão de um estado (neste caso $+1$) sobre o estado passivo (estado zero). No padrão tipo 2 queremos estudar distintas situações onde aparece competição entre os estados.

7.1 Padrão tipo 1: Invasão do estado $+1$ sobre o zero

Como já mencionado, o estado zero é um estado passivo, que no final da evolução pode ser totalmente absorvido pela competição. Portanto queremos estudar como uma competição dinâmica entre os estados $+1$ e zero acontece quando introduzimos inércia. Obviamente que para $I = 0$ ocorrerá uma invasão total do estado ativo sobre o passivo.

7.1.1 Estado $+1$ no centro

Como primeiro exemplo colocamos um bloco central com quatro elementos no estado $+1$ em meio a um mar de elementos no estado zero e com isso poderemos ver como ocorre a invasão de um estado $+1$ sobre uma população do estado zero. Cada geração do AC está mostrada na figura 7.1. Para inércia igual a zero, o estado $+1$ leva 11 iteradas para dominar o autômato inteiro, enquanto para inércia igual a 1, são necessárias 21 iteradas até a convergência. Para outros valores de inércia o estado $+1$ não consegue dominar o AC, temos que a matriz inicial é a própria matriz na configuração estacionária. Interessante

observar que a forma geométrica da difusão do estado $+1$ pelo AC é diferente para inércia 0 e 1. Para $I = 0$ o AC cresce numa forma quadrada, enquanto para inércia igual a 1, a forma de crescimento do AC é um losango. Isso ocorre pois os elementos zeros que estão em contato com a diagonal do quadrado tem apenas um vizinho $+1$, portanto mudam de estado apenas quando $I = 0$, se $I = 1$, já não ocorrerá mais mudança.

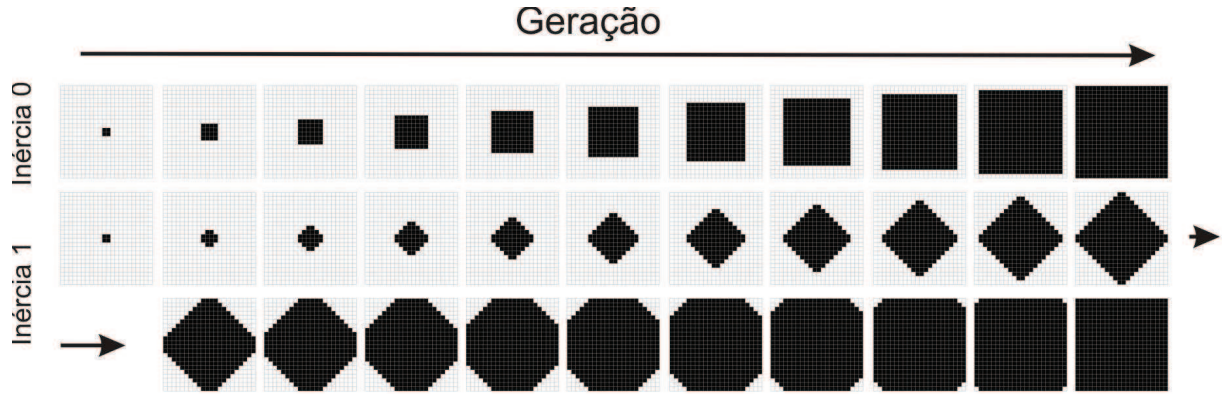


Figura 7.1: Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e 4 elementos centrais no estado $+1$.

7.1.2 Estado $+1$ nos cantos

Como segundo exemplo colocamos um único estado $+1$ num dos cantos do AC, que no resto contém apenas elementos no estado zero. Podemos ver a evolução desse AC na figura 7.2. Para essa configuração, o estado $+1$ consegue dominar a matriz inteira apenas quando a inércia é igual a zero, para outros valores de inércia não há nenhuma expansão do estado $+1$. O AC leva 22 iterações para convergir, que é exatamente o tamanho do AC, se tivéssemos uma matriz maior, levaria mais tempo para convergir, sendo o tempo de convergência igual ao tamanho da matriz. O estado $+1$ consegue dominar o AC apenas para inércia zero, pois a pressão máxima que o elemento que inicialmente encontra-se no canto tem é igual a 1, portanto quando $I \geq 1$ não ocorre mais mudanças de estado.

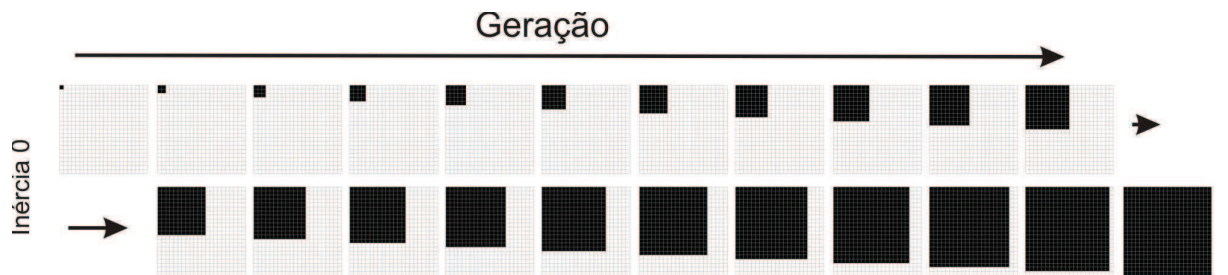


Figura 7.2: Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e 4 elementos $+1$ em um dos cantos.

Se colocarmos 2 elementos do estado $+1$ em cantos opostos (figura 7.3) podemos ver que o AC leva o mesmo tempo para convergir quando comparado com apenas um elemento

+1 em um dos cantos, porém a invasão do estado +1 é mais eficiente, pois a população do estado +1 aumenta mais rapidamente para elementos +1 em cantos opostos do que em apenas um canto.

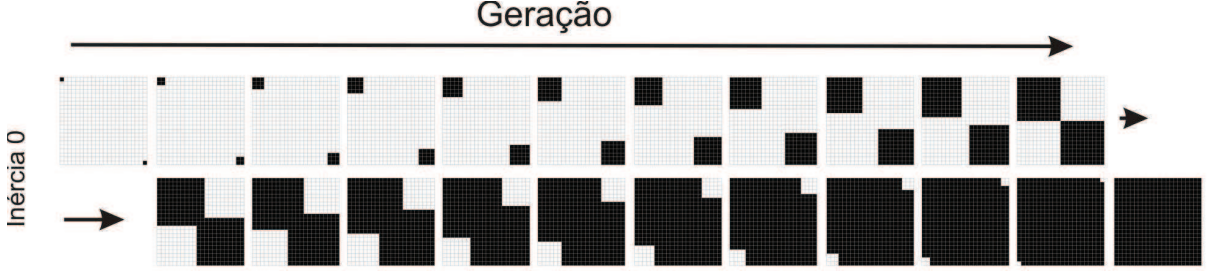


Figura 7.3: Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e 2 elementos +1 em distribuídos em cantos opostos.

Já se colocarmos um elemento no estado +1 em cada canto (figura 7.4), a invasão do estado +1 é ainda mais eficiente, levando apenas 11 iteradas para dominar o AC inteiro. Porém para nenhuma das configurações com elementos nos cantos o estado +1 consegue dominar a matriz inteira quando a inércia é maior que zero.



Figura 7.4: Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e um elemento +1 em cada canto.

Por último, notamos que se aumentarmos o número de elementos +1 nos cantos, então tal estado conseguirá dominar o AC inteiro para inércia diferente de zero. Para ilustrar, consideramos 4 elementos +1 em cada canto. Na figura 7.5 podemos ver que para inércia igual a 1 o estado +1 consegue invadir um mar de elementos no estado zero. Quando colocamos 4 elementos +1 no centro do AC, tínhamos que esse estado se expandia de forma quadrada para inércia zero e em forma de losango para $I = 1$, o mesmo ocorre aqui, pois a forma da expansão é a mesma, só que ao invés de termos 4 elementos centrais, temos 4 elementos em cada canto. Isto se dá pois a pressão exercida pela vizinhança dos elementos colocados à diagonal dos quadrados é igual a um, com isso esses elementos não vão mudar inicialmente de estado quando $I = 1$. O tempo de convergência para essa configuração espacial é de 10 iteradas para $I = 0$, uma a menos do que quando temos apenas um elementos +1 em cada canto, e 20 iteradas quando a inércia é igual a 1, duas a menos de quando temos 4 elementos centrais. Quando $I = 0$ podemos ver que a matriz com 4 elementos +1 em cada canto é igual à primeira geração do caso em que temos apenas 1 elemento em cada canto, por isso τ para 4 elementos +1 em cada canto é igual a $\tau - 1$ para um elemento em cada canto.

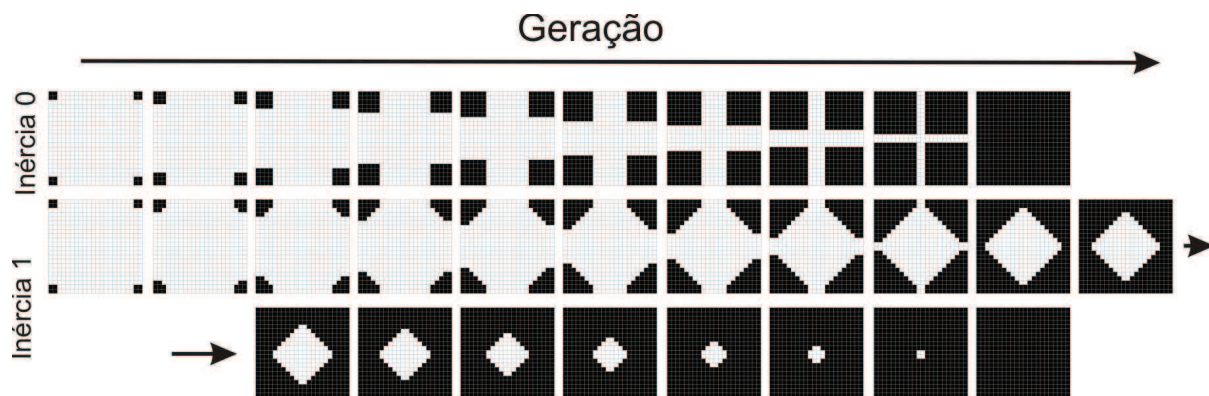


Figura 7.5: Evolução de um autômato com todos os elementos no estado zero e 4 elementos +1 em cada canto.

7.2 Padrão tipo 2: Competição entre o estado +1 e -1

7.2.1 Estado +1 acima e estado -1 abaixo da diagonal principal intercalados com o estado 0

Queremos agora investigar poucas situações simples, mas que nos permitem analisar algumas características dinâmicas da competição entre o estado +1 e -1 quando os distribuímos de forma simétrica no AC. Como primeiro exemplo, colocamos o estado +1 acima da diagonal principal e o estado -1 abaixo, porém intercalando entre cada par de elementos de mesmo estado um elemento no estado zero, criando um tabuleiro de xadrez de “três cores”. Na figura 7.6 podemos ver como esse AC evolui para diferentes valores de I . Para $I = 0$ o AC leva apenas 1 iterada para convergir, com a formação de duas regiões onde dominam o estado +1 e -1. A fronteira entre as duas regiões é bem definida, tem uma forma de “escada”, onde cada “degrau” contém 2 elementos de mesmo estado. Já para $I = 1$, esse autômato demora mais para convergir, 10 iteradas, porém a forma da fronteira é um pouco diferente daquele para $I = 0$, pois os “degraus” possuem apenas um elemento de mesmo estado. Os elementos no estado zero que se encontravam nos cantos da diagonal principal permaneceram inalterados, pois em sua vizinhança havia o mesmo número de +1 e de -1. Para inércia 2 e 3 temos uma rápida convergência, mas agora mais termos 0 sobrevivem na fronteira que divide os dois estados. Em particular, no caso em que $I = 3$ os estados zero sobrevivem ao longo de toda a diagonal principal e não apenas nos cantos das mesmas. A diferença na dinâmica para diferentes valores de inércia vem do fato que se aumentamos o valor da inércia, a pressão que a vizinhança exerce sobre um elemento não é mais suficiente para que ocorra a mudança de estado, permitindo que o estado neutro sobreviva até a configuração estacionária.

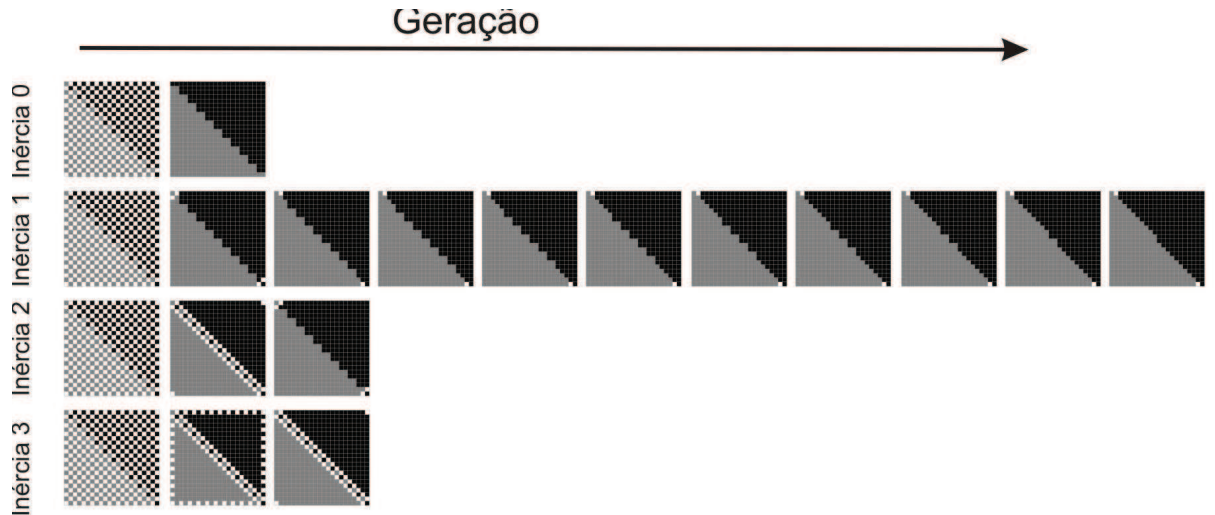


Figura 7.6: Evolução de um autômato onde encontramos o estado $+1$ acima e o estado -1 abaixo da diagonal principal intercalados com o estado 0 .

7.2.2 Distribuição intercalada de $+1$'s e -1 's

Em tal configuração colocamos o estado $+1$ intercalado com o estado -1 , formando exatamente um tabuleiro de xadrez. A dinâmica desse sistema para $I = 0$ é muito interessante, pois não temos uma configuração estacionária, o AC varia entre duas configurações, num processo oscilante de período 2 (essas duas configurações são as duas últimas matrizes da figura 7.7). Outro ponto é que o AC evolui somente para inércia igual a zero. Se $I \geq 1$, a configuração inicial já é a configuração estacionária. Também devemos frisar que a dinâmica para $I = 0$ ocorre apenas quando assumimos condições de contorno não periódicas, ou seja, estados de uma borda não vêm estados da borda oposta. Isto é facilmente verificado de observamos que os primeiros elementos a mudarem de estado são justamente os dos cantos e da borda.

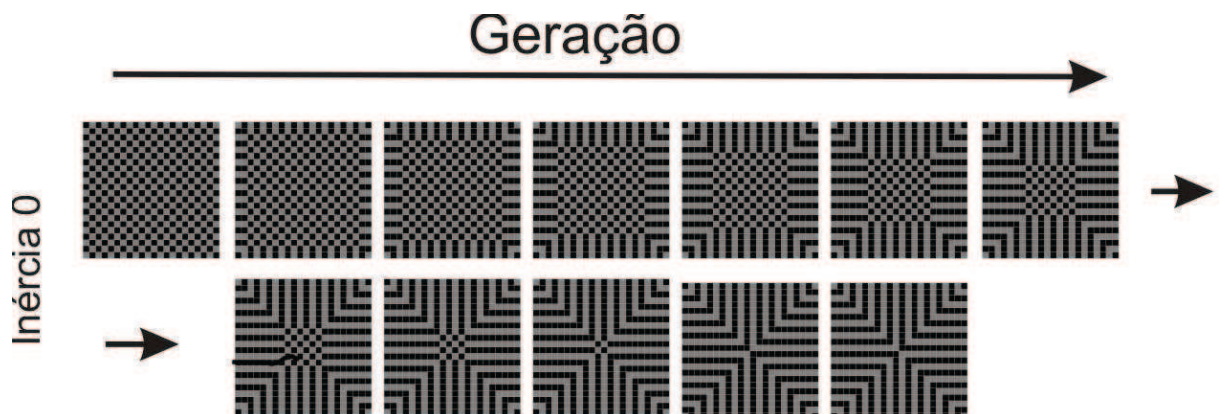


Figura 7.7: Evolução de um autômato onde encontramos o estado $+1$ e -1 intercalados, na forma de um tabuleiro de xadrez. Note que a evolução entra num ciclo periódico de período 2.

7.2.3 Padrões simétricos diversos

Aqui consideramos diferentes padrões simétricos. Em primeiro lugar vamos assumir linhas de estados $+1$ e -1 acompanhando as bordas do AC (ver figura 7.8). Temos então a formação de diferentes padrões quando I varia, em particular, quando $I = 0$ e $I = 1$, o estado $+1$ domina o AC (notar que o padrão é tal que $+1$ tem maior população inicial). A diferença da evolução de $I = 0$ e $I = 1$ vem do fato que aumentando a inércia, diminuimos a “eficiência” com que o estado majoritário da vizinhança consegue mudar o estado do elemento central. Temos também que para inércia igual a $I = 3$ e $I = 4$ a evolução do AC é exatamente a mesma. Isto significa que $I = 3$ e $I = 4$ nessa configuração espacial são equivalentes, porém essa equivalência vale apenas para essa configuração espacial. Isto se dá pois não temos nenhuma vizinhança com 2 ou 3 elementos de mesmo estado, e tais vizinhanças são justamente aquelas cuja ação de $I = 2$ e $I = 3$ se dá de forma diferente.

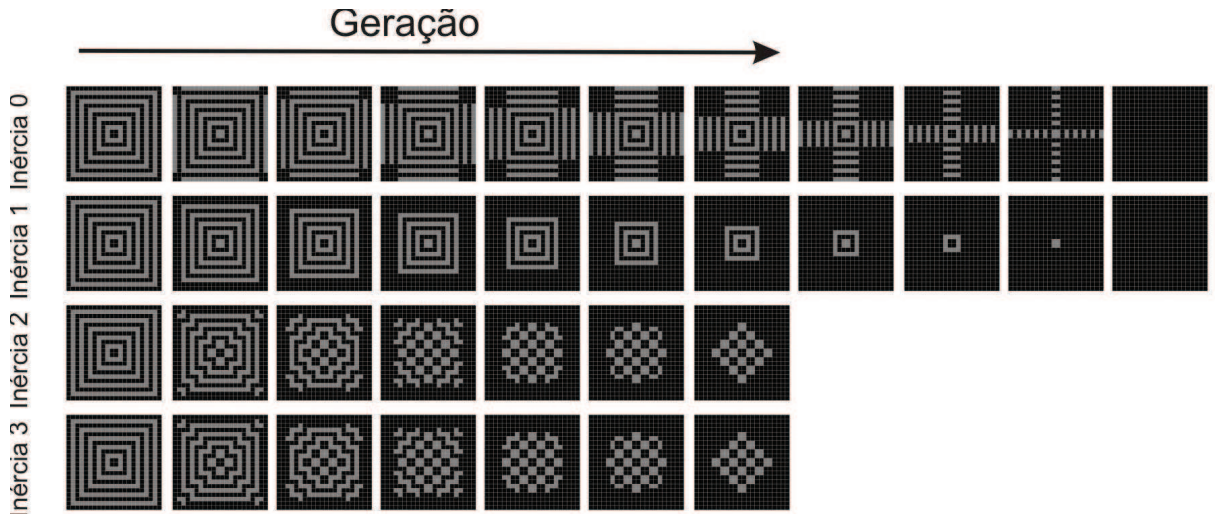


Figura 7.8: Evolução de um autômato com uma distribuição simétrica dos estados $+1$ e -1 , mas com o estado $+1$ inicialmente em maior número.

Na figura 7.9 consideramos a mesma situação anterior, mas com uma pequena modificação do padrão central. O interessante é que apenas mudando o valor do estado de dois dos quatro elementos centrais, alteramos completamente a dinâmica final. Quando $I = 0$ o estado $+1$ já não consegue dominar o AC, apenas domina as regiões dos cantos, enquanto a região central é dominado pelo estado -1 , pois neste caso não estamos mais privilegiando o estado $+1$ no centro, mas sim o estado -1 . O mesmo ocorre para inércia igual a $I = 1$, a única diferença é que o AC demora menos para convergir e a forma geométrica do domínio de -1 também muda. Continuamos tendo uma dinâmica de evolução igual para $I = 2$ e $I = 3$, indicando novamente que na vizinhança de nenhum elemento encontramos 2 ou 3 elementos de mesmo estado, apenas ou mais que 3 ou menos que 2. Entretanto, agora em apenas um passo de evolução, se $I = 4$ e $I = 5$ atingimos o estado estacionário que é distinto da configuração inicial.

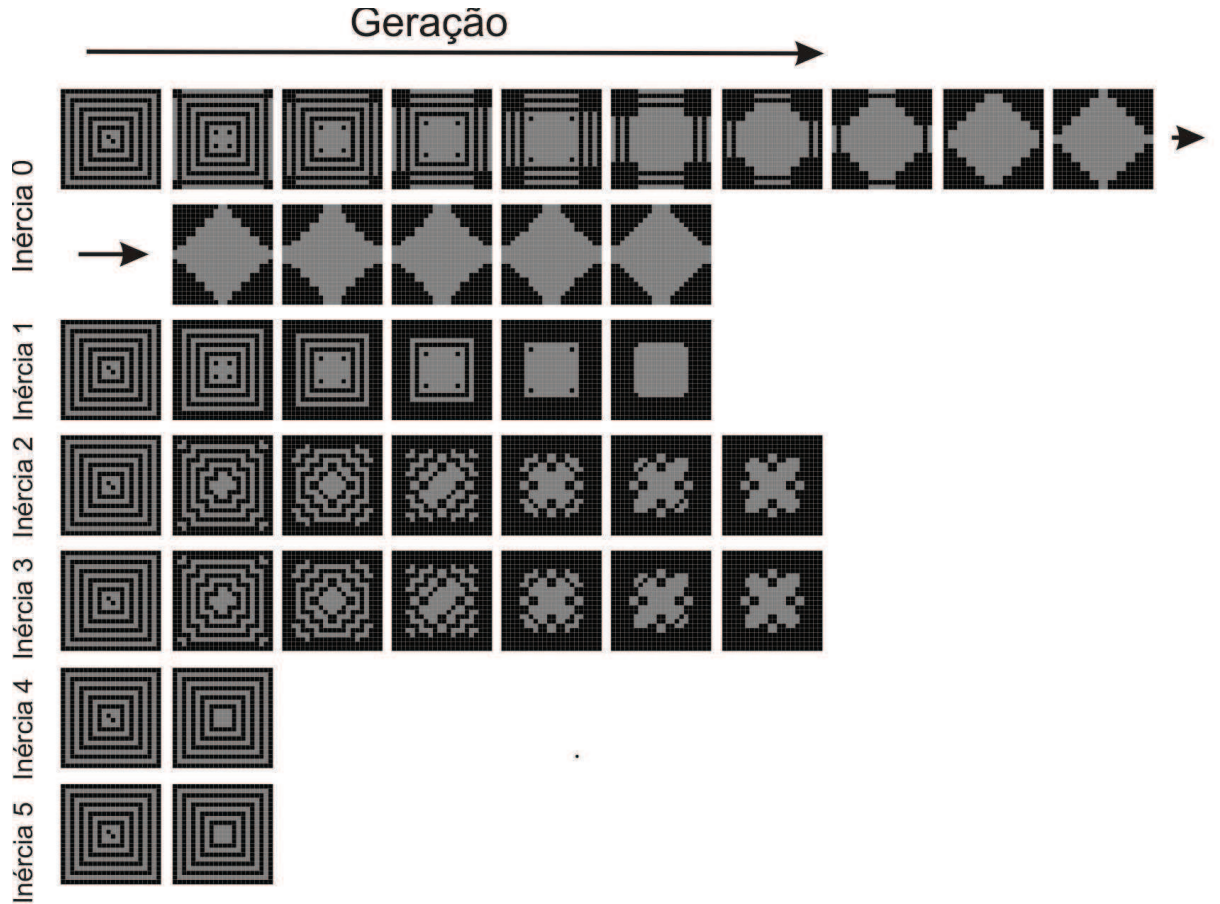


Figura 7.9: Semelhante à figura 7.8 mas com uma pequena modificação do padrão central do AC inicial.

Por último, em 7.10 e 7.11 mostramos duas estruturas espaciais diversas e suas respectivas evoluções. As diferenças mais significativas que observamos são nos tempos de convergência para cada valor de I . Porém, o padrão espacial formado nas configurações estacionárias é muito similar para as duas situações e as diferenças encontradas ocorrem devido à pequena diferença das configurações iniciais. Outro ponto a ser salientado é novamente a sobrevivência do estado zero mesmo para $I = 0$.

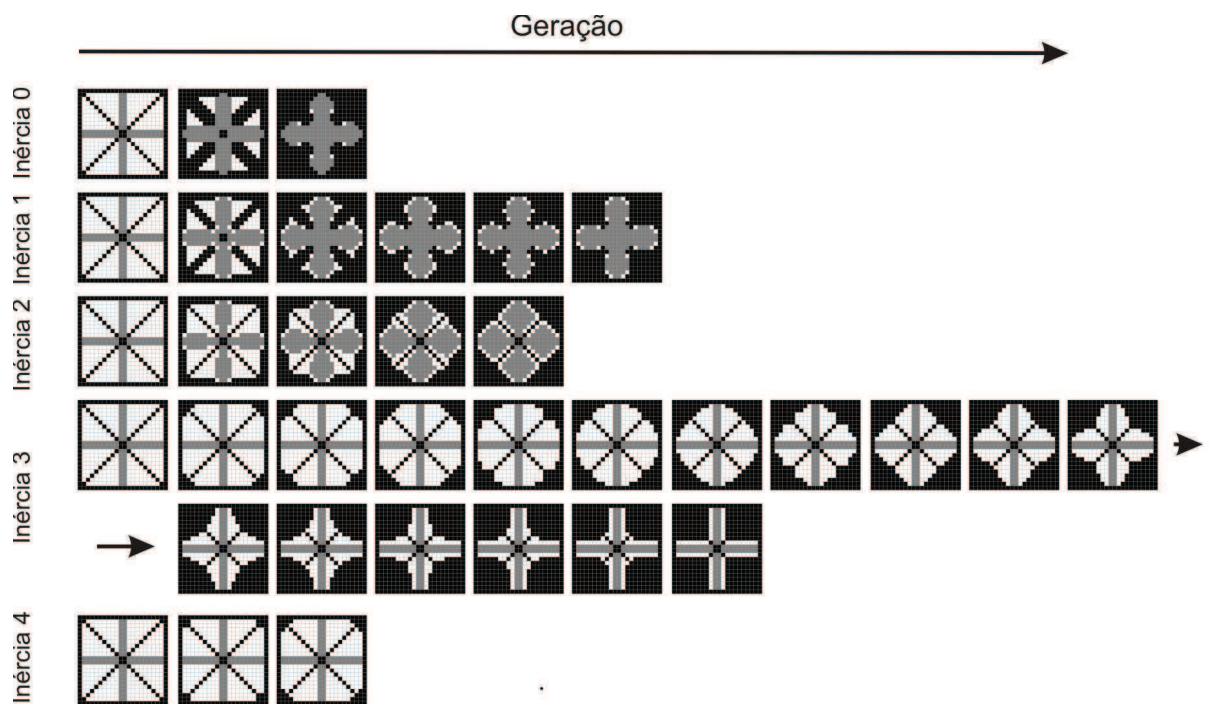


Figura 7.10: Evolução de um AC com um padrão espacial particular, bastante simétrico.

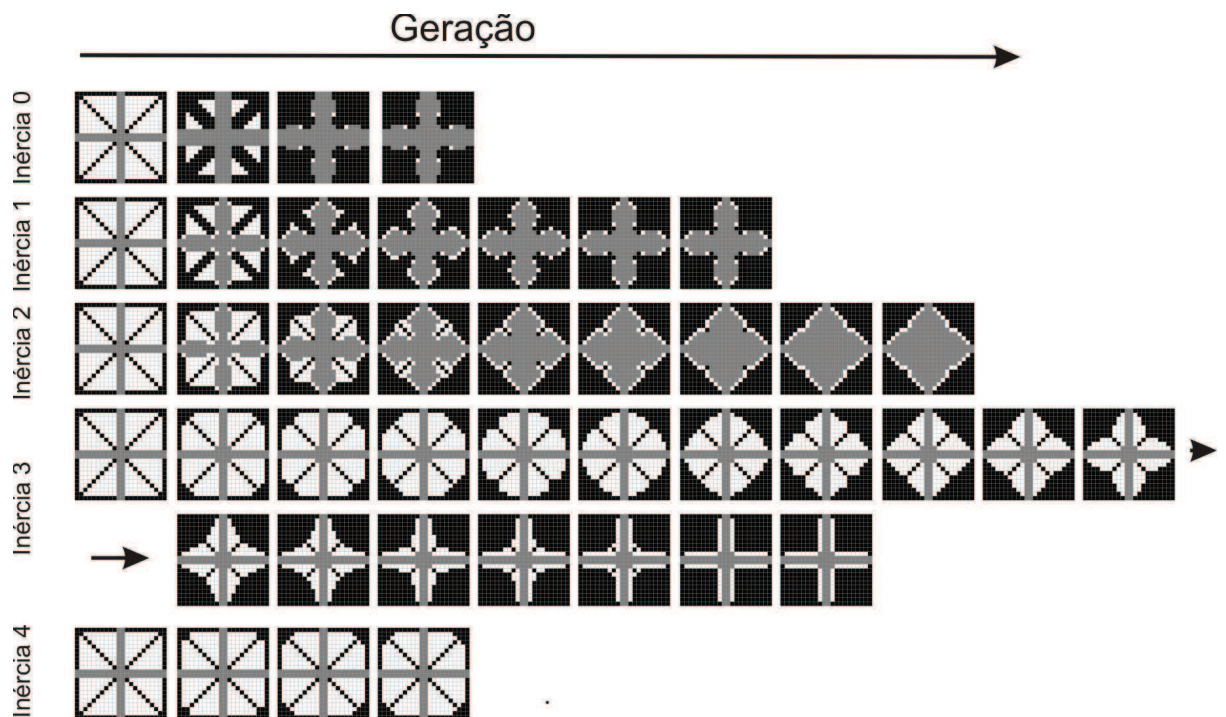


Figura 7.11: Evolução de um que é uma pequena modificação do AC da figura 7.10.

Capítulo 8

Conclusão e Considerações Finais

Neste trabalho introduzimos um novo tipo de AC, onde um “estado interno”, a inércia, tende a dificultar a mudança dos estados imposta pela evolução dinâmica. Estudamos diferentes situações para nosso sistema, assumindo distintas funções inércia $I(i, j)$. Em particular, discutimos em mais detalhes a evolução do nosso AC, considerando a inércia igual para todos os elementos e distintas estruturas espaciais para a distribuição dos estados iniciais.

Vimos que os autômatos celulares associados à inércia trazem vários resultados interessantes e as vezes contra intuitivos. Com um AC bidimensional, representado por uma matriz 22×22 , com 3 estados $(-1, 0, +1)$ e com a regra determinística dada no capítulo 2, vimos que em geral a população final média do estado $+1$ (majoritária) cresce linearmente com a população inicial. Também, a clusterização final média do estado $+1$ cresce linearmente com a população inicial. Além disso encontramos que a população final média é menor para matrizes com clusterização inicial maior. Já para a clusterização final média do estado $+1$ em função da clusterização inicial, encontramos que para inércias baixas, o valor da clusterização final média é menor para matrizes com clusterização inicial mais alta, mas se temos inércias mais altas, ocorre o inverso, pois matrizes com clusterização inicial mais alta tem clusterização final média mais alta.

No caso em que I é igual para todos os elementos, o aumento do valor da inércia faz com que a população final média de $+1$ versus a população inicial diminua. Já a clusterização inicial não influencia muito na configuração final média do AC, pois tanto a população final média quanto a clusterização final média não variam muito para diferentes valores de clusterização inicial, independente da configuração e do valor da inércia. Esses resultados sugerem que para um estado dominar a matriz, é necessário que a população inicial do estado $+1$ seja alta, sem importar muito a clusterização inicial, pois matrizes com população inicial alta tem população final e clusterização final alta também. Isto porém somente é verdade no caso de distribuição aleatória de estados ao longo do AC. Quando existem padrões espaciais para a configuração inicial, a exata forma de distribuição dos estados pode influenciar muito a dinâmica do sistema.

O tempo de convergência muda bastante com o valor da inércia, pois quando a aumentamos, o tempo de convergência (quando existe) em geral diminui. Uma explicação simples para isto é que a resistência faz com que menos estados se modifiquem, e assim o número de iteradas até atingir a estacionaridade, na média, também diminui.

Supondo certos padrões espaciais para as configurações do AC em $I = 0$, temos que para a dinâmica de invasão, apenas em alguns padrões ocorre total dominação para inércia diferente de zero. Também é interessante notar que a difusão espacial se dá de formas diferentes para diferentes valores de inércia.

Este trabalho teve como objetivo estudar aspectos gerais do AC, ou seja, suas propriedades dinâmicas e estatísticas, sem se preocupar com possíveis aplicações. Continuação para o mesmo (por exemplo, numa tese de doutorado) pode tanto prosseguir focando em outros aspectos dinâmicos do sistema, quanto propor aplicações para o presente modelo.

Com relação à primeira opção, podemos estudar intervalos mais largos de p_+ e c_+ iniciais. Para tanto precisamos melhorar o processo de geração de matrizes iniciais. Também podemos variar a dimensão da matriz para ver se a dinâmica muda quando o tamanho do AC muda. Podemos analisar o comportamento da população e da clusterização dos outros estados (0 e -1) quando criamos padrões na distribuição de inércia para tais estados. Além disso, combinações de padrões espaciais para as condições iniciais e inerciais podem ser consideradas. Por último, muito interessante é o caso onde $I = I(t, i, j)$

Finalmente, como aplicações do presente sistema, podemos citar que sendo os estados +1 e -1 os “formadores de opinião”, o estado 0 a “população geral”, e a inércia fatores “econômicos-culturais” que dificultam mudanças, podemos pensar que nosso AC seria de utilidade em modelos de disputas eleitorais, domínio de mercado por produtos rivais, eficiência de remédios contra diferentes doenças, dispersão de poluentes, etc. Esperamos num futuro próximo implementar tais possibilidades para nosso AC com inércia.

Referências Bibliográficas

- [1] ABEL, David L.; TREVORS, Jack T. Self-organization vs. self-ordering events in life-origin models. **Physics of Life Reviews**, v. 3, n. 4, p. 211-228. 2006.
- [2] ALONSO-SANZ, A.; MARTIN, M. Three-state one-dimensional cellular automata with memory. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 21, p. 809-834. 2004.
- [3] AXELROD, R., The Dissemination of Culture: A Model with Local Convergence and Global Polarization. **Journal of Conflict Resolution**, v. 41, p. 203-226. 1997.
- [4] BECHARA, Bruno Flávio Zanatta; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta . **Autômato Celular no Estudo Microscópico dos Indivíduos HIV-Positivos com Tratamento**. 2006. Trabalho apresentado à 6. Semana da Matemática, Uberlândia, 2006.
- [5] BOCCARA, Nino. **Modeling complex systems**. Springer-Verlag, p. 221-224. 2004.
- [6] CHOWDHURY, D.; WOLF, D. E.; SCHRECKENBERG, M. Particle hopping models for two-lane traffic with two kinds of vehicles: Effects of lane-changing rules. **Physica A**, v. 235, n. 3-4, p. 417-439. 1997.
- [7] COLE, Stephen N. Real-time computation by n-dimensional iterative arrays of finite-state machines. **IEEE Transactions on Computers**, v. 18, p. 349-365. 1969.
- [8] CZEIZLER, E.; KARI, J. M. A tight linear bound on the neighborhood of inverse cellular automata. **Automata, Languages and Programming, Proceedings, Book Series: Lecture Notes in Computer Science**, v. 3580, p. 410-420. 2005.
- [9] EPPSTEINA, M. J.; BEVERB, J. D.; MOLOFSKYC, J. .Spatio-temporal community dynamics induced by frequency dependent interactions. **Ecological Modelling**, v. 197, p. 133-147. 2006.
- [10] EPSTEIN, J. M.; AXTELL, R., **Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up**. The MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- [11] FERREIRA, Daniel A. C. **Modelagem do desmatamento mato-grossense**. Manaus: INPA/UFAM, 2006. 109f.: il. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Biologia Tropical e Recursos Naturais do convênio INPA/UFAM - Instituto Nacional de Pesquisas da Amazônia - INPA, Manaus, 2006.
- [12] GARDNER, M. **The game of life, parts I-III**. Chs. 20-22 in *Wheels, Life, and other Mathematical Amusements*. New York: W. H. Freeman, 1983.

- [13] GARDNER, M. Cellular automata, self-reproduction, garden of eden and game life. **Scientific American**, v. 224, n. 2, p. 112-&. 1971.
- [14] GRASSBERGER, P. Chaos and diffusion in deterministic cellular automata. **Physica D**, v. 52. 1984.
- [15] HOLYST, J. A.; KACPERSKI, K.; SCHWEITZER, F. .Phase transitions in social impact models of opinion formation. **Physica A**, p. 199-210. 2000.
- [16] KATERELOS, I. D.; KOULOURIS, A. G. Is prediction possible? Chaotic behavior of multiple equilibria regulation model in cellular automata topology. **Complexity**, v. 10, n. 1, p. 23-36. 1984.
- [17] MACKAY, G.; JAN, N. Forest fires and critical phenomena. **Journal de Physics A: Mathematical and General**, v. 17, p. L757-L760. 1984.
- [18] MITCHELL, M. Computation in cellular automata: a selected review. **Nonstandard Computation**. Weinheim: VHC Verlagsgesellschaft. 1996.
- [19] MOLDOVAN, S.; GOLDENBERG, J. Cellular automata modeling of resistance to innovations: effects and solution. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 71, n. 5, p. 425-442. 2004.
- [20] MONETTI, R. A.; ALBANO, E. V. Critical edge between frozen extinction and chaotic life. **Physical Review E**, v. 52, n. 6, p. 5825-5831, Part A. 1995.
- [21] NAGEL, K. ;SCHRECKENBERG, M. A cellular automaton model for freeway traffic. **Journal de Physique I**, v. 2, p. 2221-2229. 1992.
- [22] NEUMANN, John Von. Theory of self-reproducing automata. **University of Illinois Press** Champaign, IL, USA. 1966.
- [23] NOWAK, A.; LEWENSTEIN, M. Modeling social change with cellular automata, In: Hegselmann, Rainer; Mueller, Ulrich; Troitzsch, Klaus G. **Modeling and Simulation in the Social Sciences from the Philosophy of Science Point of View**. Kluwer Academic Publishers, Holanda, 1996, p. 249-285.
- [24] OLIVEIRA, Gina M. B.; OMAR, Nizam; OLIVEIRA, Pedro P. B. Computação e evolução em autômatos celulares unidimensionais. **Revista Mackenzie de Engenharia e Computação**, v. 1, n. 1, p. 39-55. 2000.
- [25] PACKARD, N.H. ;Wolfram, S. Two-dimensional cellular automata. **Journal of Statistical Physics**, v. 38, p. 901-946. 1984.
- [26] PEPPER, F.; ISOKAWA, T.; Kouda, N.; et al. Self-timed cellular automata and their computational ability. **Future Generation Computer Systems**, v. 18,n. 7, p. 893-904. 2002.
- [27] PLATKOWSKI, T. Spatial self-organization in three-component mixtures. **Physica A**, v. 311, p. 291-305. 2002.
- [28] RENDELL, P. This is a turing machine implemented in Conway's game of life. Disponível em: <<http://www.rendell.uk.co/gol/tm.htm>> Acesso em: 3 fev. 2010.

- [29] RUCKER, R. **The lifebox, the seashell, and the soul**. Basic Books, Thunder's Mouth Pr, New York, NY. 2005.
- [30] SCHELLING, T., **Micromotives and Macrobehavior**. New York: Norton, 1978.
- [31] SCHELLING, T., Models of Segregation. **American Economics Review, Paper and Proceedings**, v. 59,n. 2, p. 488-493. 1969.
- [32] SCHIFF, Joel L. **Cellular automata: a discrete view of the world (wiley series in discrete mathematics & optimization)**. Wiley-Interscience. 2008.
- [33] VARGAS, D. V.; SIMÕES, E. do Valle; DELBEM, Alexandre C. B. .Uma colônia artificial de formigas modelada por sistema evolutivo. Universidade de São Paulo. 2004. Disponível em: <<http://fog.neopages.org/papers/SBRN2004.pdf>> Acesso em: 10 jan. 2010.
- [34] WOLFRAM, S. **A new kind of science**. Wolfram Media, Inc., p. 169-192. 2002.
- [35] WOLFRAM, S. **Cellular automata and complexity: collected papers**. West-view Press, Julho 2002.
- [36] WOLFRAM, Stephen. Cellular automata as simple self-organizing systems. **Caltech preprint**, CALT-68-938. 1982.
- [37] WU, F. L. Calibration of stochastic cellular automata: the application to rural-urban land conversions. **International Journal of Geographical Information Science**, v. 16, n. 8, p. 795-818. 2002.
- [38] WU, F. L. Modelling using stochastic, finite state cellular automata: rule inference from continuum models. **Applied Mathematical Modelling**, v. 26, n. 6, p. 701-714. 2002.
- [39] YOUNG, Truman P. Restoration ecology and conservation biology. **Biological Conservation**, v. 2, n. 1, p. 73-83. 2000.
- [40] ZHANG, T.; XUAN, H.; GAO, B. **Modeling diffusion of innovations with cellular automata**. 2005 International Conference on Service Systems and Services Management - Proceedings of ICSSSM'05", v. 2, 2005.
- [41] ZUPAN, N. Using cellular automata to simulate electronic commerce receptivity in small organisations. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 75, n. 6, p. 798-818. 2007.
- [42] ZUZE, K. Calculating space. **MIT University Press**, MIT Technical Translation AZT-70-164-GEMIT. 1970.